

Inhalt

1. Die historische Entwicklung 1
- 1.1. Die Anfänge 1
- 1.2. Die antike Geometrie 1
- 1.3. Die Kalender 2
- 1.4. Die Papyri der Ägypter 3
- 1.5. Die Ruine von Stonehenge 5
- 1.6. Übungsaufgaben 6
- 1.7. Die klassische Geometrie 6
- 1.8. Der Satz des *Pythagoras* 7
- 1.9. Die Irrationalität von $\sqrt{2}$ 9
- 1.10. Die Umkehrung des Pythagoräischen Lehrsatzes 10
- 1.11. Die Größten: *Euklid, Archimedes und Apollonius* 11
- 1.12. Das Parallelenaxiom 12
- 1.13. Übungsaufgaben 14
- 1.14. Die Winkeldreiteilung 16
- 1.15. Die Koordinatengeometrie 18
- 1.16. Die Topologie 20
- 1.17. Berühmte Probleme der Antike 23
- 1.18. Übungsaufgaben 24
- 1.19. Der Beginn der Arithmetik – Die Zahlzeichen 25
- 1.20. Die römischen Ziffern 27
- 1.21. Multiplikationssysteme 29
- 1.22. Positionssysteme 30
- 1.23. Übungsaufgaben 32
- 1.24. Das Rechnen – Der falsche Ansatz 33
- 1.25. Die Multiplikation der Ägypter 33
- 1.26. Die Quadratwurzel 34
- 1.27. Tafeln 35
- 1.28. Übungsaufgaben 36
- 1.29. Zahlenspielereien, Zahlentheorie 37
- 1.30. Vollkommene, unvollkommene und befreundete Zahlen 37
- 1.31. *Diophantos* 38
- 1.32. *Fermat* 39
- 1.33. Übungsaufgaben 39

- 2. Zahlen und Zahlensysteme 41**
- 2.1. Die natürlichen Zahlen 41
- 2.2. Die *Peanoschen* Postulate 42
- 2.3. Das Induktionspostulat 43
- 2.4. Übungsaufgaben 43
- 2.5. Die vollständige Induktion 44
- 2.6. n -Fakultät 45
- 2.7. Die Exponenten 46
- 2.8. Eine Ungleichung 46
- 2.9. Geometrische Reihen 47
- 2.10. Übungsaufgaben 48
- 2.11. Algebraische Eigenschaften 50
- 2.12. Ordnung 52
- 2.13. Übungsaufgaben 54
- 2.14. Die ganzen Zahlen 55
- 2.15. Subtraktion 57
- 2.16. Übungsaufgaben 58
- 2.17. Die rationalen Zahlen 59
- 2.18. Die algebraische Umformung 62
- 2.19. Übungsaufgaben 64
- 2.20. Der Körper 64
- 2.21. Null als ein Produkt 65
- 2.22. Untersuchung von Körpereigenschaften 66
- 2.23. Ein unvollständiger Körper 66
- 2.24. Übungsaufgaben 67
- 2.25. Die reellen Zahlen 68
- 2.26. Obere Schranken und kleinste obere Schranken 70
- 2.27. Vollständigkeit und die reellen Zahlen 72
- 2.28. Übungsaufgaben 74
- 2.29. Dichtheit 75
- 2.30. Rationale Approximation 75
- 2.31. Übungsaufgaben 77
- 3. Mengenlehre und Logik 79**
- 3.1. Vom Konkreten zum Abstrakten und wieder zurück 79

X *Inhalt*

- 3.2. Die Mengen 79
- 3.3. Die Gleichheit bei Mengen 80
- 3.4. Vereinigung 80
- 3.5. Übungsaufgaben 81
- 3.6. Der Durchschnitt 82
- 3.7. Die Distributivgesetze 83
- 3.8. Übungsaufgaben 85
- 3.9. Das Komplement 86
- 3.10. Das Enthaltensein von Mengen 87
- 3.11. Übungsaufgaben 88
- 3.12. Die Dualität 89
- 3.13. Übungsaufgaben 90
- 3.14. Die Abstraktion 91
- 3.15. Definitionen 92
- 3.16. *Boolesche Algebra*: Die *Huntington-*
Postulate 94
- 3.17. Übungsaufgaben 95
- 3.18. Weitere Theoreme 96
- 3.19. Übungsaufgaben 99
- 3.20. Teilweise Ordnung 99
- 3.21. Vorausgehen 100
- 3.22. Kommentar 101
- 3.23. Übungsaufgaben 102
- 3.24. Die zweiwertige *Boolesche Algebra* 103
- 3.25. Schaltkreise 103
- 3.26. Übungsaufgaben 107
- 3.27. Äquivalenztabellen 108
- 3.28. Die teilweise Ordnung in Schaltkreisen
109
- 3.29. Übungsaufgaben 109
- 3.30. Die Algebra der Logik 109
- 3.31. Disjunktion, Konjunktion und Negation
110
- 3.32. Aussagenvariablen 110
- 3.33. Äquivalenz 111
- 3.34. 1 und 0 111
- 3.35. Logik als eine *Boolesche Algebra* 112
- 3.36. Übungsaufgaben 114
- 3.37. Die Negation 115
- 3.38. Übungsaufgaben 116
- 3.39. Die Implikation 116
- 3.40. Übungsaufgaben 121
- 3.41. Richtige Schlußfolgerungen 122
- 3.42. Tautologien 122
- 3.43. Anwendungen 123
- 3.44. Übungsaufgaben 126

- 4. Teilbarkeit** 129
- 4.1. Einführung 129
- 4.2. Bezeichnungsweise – Kongruenz modulo m 129
- 4.3. Gleichheit und Addition modulo m 130
- 4.4. Übungsaufgaben 133
- 4.5. Die Multiplikation modulo m 134
- 4.6. Das Distributivgesetz 137
- 4.7. Übungsaufgaben 137
- 4.8. Grundlegende Theoreme – Die Teilbarkeit 138
- 4.9. Größte gemeinsame Teiler 139
- 4.10. Die Lösung von Kongruenzen 141
- 4.11. Übungsaufgaben 143
- 4.12. Verfahren zur Lösung von Kongruenzen 144
- 4.13. Übungsaufgaben 148
- 4.14. Simultane Kongruenzen 149
- 4.15. Simultane Kongruenzen in mehr als einer Variablen 152
- 4.16. Übungsaufgaben 154
- 4.17. Über Geheimschriften 155
- 4.18. Übungsaufgaben 157

- 5. Analytische Geometrie** 159
- 5.1. Einleitung 159
- 5.2. Das kartesische Koordinatensystem 159
- 5.3. Die Gleichung einer Geraden 160
- 5.4. Steigung und Achsenabschnitt 163
- 5.5. Übungsaufgaben 168
- 5.6. Parallele Geraden 168
- 5.7. Senkrechte Geraden 170
- 5.8. Übungsaufgaben 172
- 5.9. Der Abstand zweier Punkte 173
- 5.10. Senkrechte Halbierungslinien von Geradenabschnitten 174
- 5.11. Der Kreis 176
- 5.12. Übungsaufgaben 178
- 5.13. Die Parabel 179
- 5.14. Die physikalischen Eigenschaften der Parabel 183
- 5.15. Übungsaufgaben 183
- 5.16. Die Ellipse 185
- 5.17. Weg vom Ursprung 187
- 5.18. Die physikalischen Eigenschaften der Ellipse 190

- 5.19. Übungsaufgaben 191
- 5.20. Die Hyperbel 191
- 5.21. Weg vom Ursprung 194
- 5.22. Die Kegelschnitte 196
- 5.23. Übungsaufgaben 198
- 5.24. Algebra und Geometrie 198
- 5.25. Ein geometrischer Lehrsatz 199
- 5.26. Übungsaufgaben 202

- 6. Funktionen 205**
 - 6.1. Relationen und Funktionen 205
 - 6.2. Die Relationen 206
 - 6.3. Übungsaufgaben 207
 - 6.4. Die Funktionen 208
 - 6.5. Bezeichnungsweise 208
 - 6.6. Graphische Darstellung einer Funktion 210
 - 6.7. Die Funktion als Abbildung 211
 - 6.8. Die Umkehrfunktion 211
 - 6.9. Übungsaufgaben 213
 - 6.10. Zusammengesetzte Funktionen 214
 - 6.11. Weitere graphische Darstellungen von Relationen und Funktionen 215
 - 6.12. Simultane, lineare Ungleichungen 220
 - 6.13. Übungsaufgaben 221
 - 6.14. Spezielle Funktionen 222
 - 6.15. Das größte Ganze 222
 - 6.16. Der Absolutbetrag 223
 - 6.17. Eine Alternative 224
 - 6.18. Der Absolutbetrag als Abstand 225
 - 6.19. Übungsaufgaben 226

- 7. Differential- und Integralrechnung 229**
 - 7.1. Einleitung 229
 - 7.2. Grenzwerte 232
 - 7.3. Übungsaufgaben 237
 - 7.4. Tangenten 238
 - 7.5. Die Ableitung 240
 - 7.6. Übungsaufgaben 243
 - 7.7. Techniken des Differenzierens 244
 - 7.8. Das Differenzieren von Polynomen 247
 - 7.9. Rationale algebraische Funktionen 247
 - 7.10. Übungsaufgaben 248
 - 7.11. Zunehmende und abnehmende Funktionen 249
 - 7.12. Maxima und Minima 250
 - 7.13. Lokale Maxima und Minima 250

- 7.14. Graphische Darstellungen 252
- 7.15. Endpunkte 253
- 7.16. Anwendungen 254
- 7.17. Übungsaufgaben 256
- 7.18. Die Änderungsrate – Die Momentangeschwindigkeit 256
- 7.19. Übungsaufgaben 259
- 7.20. Die Umkehrung der Ableitung 260
- 7.21. Fallende Körper 261
- 7.22. Übungsaufgaben 262
- 7.23. Die Fläche 263
- 7.24. Übungsaufgaben 266
- 7.25. Das Integral 266
- 7.26. Die Fläche 268
- 7.27. Anmerkungen 269
- 7.28. Anwendungen 269
- 7.29. Übungsaufgaben 272
- 7.30. Näherungen 273

- 8. Vektoren und Matrizen 275**
- 8.1. Punkte zu Zahlen 275
- 8.2. Geordnete n -Tupel 276
- 8.3. Vektoren und Vektormultiplikation 276
- 8.4. Die algebraische Struktur der Vektormultiplikation 277
- 8.5. Die Multiplikation mit einem Skalar 278
- 8.6. Das Addieren von Vektoren 279
- 8.7. Übungsaufgaben 279
- 8.8. Die algebraische Struktur der Vektoraddition 281
- 8.9. Die Matrizen 282
- 8.10. Bezeichnungsweise 283
- 8.11. Übungsaufgaben 284
- 8.12. Quadratische Matrizen 285
- 8.13. Simultane Gleichungen 285
- 8.14. Das Multiplizieren von Matrizen 286
- 8.15. Übungsaufgaben 288
- 8.16. Das neutrale Element der Multiplikation 289
- 8.17. Weitere multiplikative Eigenschaften der Matrizen 290
- 8.18. Inverse Elemente 291
- 8.19. Algebraische Eigenschaften der Matrizenmultiplikation 293

- 8.20. Eine Anmerkung zur Lösung simultaner Gleichungen 293
- 8.21. Übungsaufgaben 294
- 8.22. Addition von Matrizen 296
- 8.23. Die Multiplikation mit einem Skalar 296
- 8.24. Algebraische Eigenschaften der Matrizenaddition 297
- 8.25. Das Summenzeichen 297
- 8.26. Das distributive Gesetz 298
- 8.27. Ringe 299
- 8.28. Übungsaufgaben 299
- 8.29. Elementare Umformungen 300
- 8.30. Ein kürzerer Weg 303
- 8.31. Übungsaufgaben 306
- 8.32. Elementare Matrizen 307
- 8.33. Matrizeninversion 308
- 8.34. Übungsaufgaben 310
- 8.35. Die Determinanten 310
- 8.36. Eigenschaften von Determinanten 312
- 8.37. Übungsaufgaben 317
- 8.38. Anwendungen der Determinanten 318
- 8.39. Übungsaufgaben 321

- 9. Computer 323**
- 9.1. Die Geschichte mechanischer Rechenhilfen 323
- 9.2. Die Rechenmaschine 324
- 9.3. Das Speichern von Zahlen 325

- 9.4. Binäre Arithmetik – Zahlenumwandlung 326
- 9.5. Übungsaufgaben 329
- 9.6. Fortlaufende Binäraddition 329
- 9.7. Fortlaufende Binärsubtraktion 331
- 9.8. Übungsaufgaben 332
- 9.9. Begrenzte Zahlenlänge 333
- 9.10. Die Darstellung von negativen Zahlen 333
- 9.11. Binäre Brüche 335
- 9.12. Übungsaufgaben 336
- 9.13. Das Gleitkomma 336
- 9.14. Übungsaufgaben 337
- 9.15. Flip-Flops 338
- 9.16. Schalter 339
- 9.17. Logische Schaltkreise 340
- 9.18. Übungsaufgaben 342
- 9.19. Ein Binäraddierer 344
- 9.20. Subtraktion 346
- 9.21. Der Bit-Zähler 347
- 9.22. Übungsaufgaben 349
- 9.23. Speicheranlagen 349
- 9.24. Befehle für eine Rechenmaschine 351
- 9.25. Ein Programm 352
- 9.26. Compiler 354
- 9.27. Übungsaufgaben 355

Anhang; Lösungen zu ausgewählten Übungsaufgaben 357

Register 401