

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Allgemeiner Zweck der Vorlesung.	1
Literarische Hilfsmittel	4

Erster Teil: Arithmetik.

I. Das Rechnen mit den natürlichen Zahlen	6
1. Einführung der Zahlen auf der Schule	6
2. Die fundamentalen Gesetze des Rechnens	9
3. Die logischen Grundlagen des Rechnens mit ganzen Zahlen	11
Bemerkungen über den Unterricht der Mathematik und die Lehrerbildung	17
4. Praxis des Rechnens mit ganzen Zahlen	18
Beschreibung der Rechenmaschine „Brunsviga“	19
II. Die ersten Erweiterungen des Zahlbegriffes	24
1. Die negativen Zahlen	24
Zur Geschichte der negativen Zahlen	27
2. Die gebrochenen Zahlen	31
3. Die irrationalen Zahlen	34
Zur Natur der Raumschauung (Präzisions- und Approximationsmathematik).	38
III. Von den besonderen Eigenschaften der ganzen Zahlen	40
Stellung der Zahlentheorie auf Schule und Universität	40
Einzelanführungen zur Zahlentheorie	43
Primzahlen, Zerlegung in Primfaktoren	43
Verwandlung rationaler Brüche in Dezimalbrüche	44
Kettenbrüche	45
Pythagoreische Zahlen, großer Fermatscher Satz	49
Problem der Kreisteilung	54
Beweis für die „Nichtkonstruierbarkeit“ des regulären Siebenecks.	56
IV. Die komplexen Zahlen	61
1. Die gewöhnlichen komplexen Zahlen	61
2. Höhere komplexe Zahlen, insbesondere Quaternionen	64
Bemerkungen über Vektorenrechnung	69
3. Quaternionenmultiplikation und Drehstreckungen des Raumes	71
Deutung im dreidimensionalen Raume	74
4. Die komplexen Zahlen im Unterricht.	81

Zwischenstück: Über die moderne Entwicklung und den Aufbau der Mathematik überhaupt	82—92
Der Aufbau der elementaren Analysis nach zwei parallelen Entwicklungsreihen verschiedenen Charakters	82
Überblick über die Geschichte der Mathematik	86

Zweiter Teil: Algebra.

Lehrbücher	93
Unser besonderes Ziel: Anwendung geometrisch anschaulicher Methoden auf die Lösung von Gleichungen.	93

I. Reelle Gleichungen mit reellen Unbekannten	94
1. Gleichungen mit einem Parameter	94
2. Gleichungen mit zwei Parametern	95
Klassifikation nach der Anzahl der reellen Wurzeln	99
3. Gleichungen mit drei Parametern	101
Ein Apparat zur numerischen Auflösung von Gleichungen	102
Die Diskriminantenfläche der biquadratischen Gleichung	103

II. Gleichungen im Gebiete komplexer Größen	109
A. Der Fundamentalsatz der Algebra	109
B. Gleichungen mit einem komplexen Parameter; Deutung durch konforme Abbildung zweier Kugeln	112
Beispiele:	
1. Die reine Gleichung	119
Irreduzibilität; „Unmöglichkeit“ der Winkeldreiteilung	122
2. Die Diëdergleichung	124
3. Die Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaedergleichung	130
4. Fortsetzung: Aufstellung der Normalgleichungen	134
5. Über die Auflösung der Normalgleichungen	140
6. Uniformisierung der Normalirrationalitäten durch transzendente Funktionen	143
Der „Causus irreducibilis“ und die trigonometrische Lösung der kubischen Gleichung	145
7. Auflösbarkeit durch Wurzelzeichen	148
8. Zurückführung allgemeiner Gleichungen auf Normalgleichungen	152
Zur Theorie der Gleichung fünften Grades	153

Dritter Teil: Analysis.

I. Logarithmus und Exponentialfunktion	155
1. Systematik der algebraischen Analysis	155
2. Die historische Entwicklung der Theorie	157
Neper und Bürgi: Die Differenzengleichung	158
Das 17. Jahrhundert: Der Hyperbelinhalt	160
Euler und Lagrange: Algebraische Analysis	164
Das 19. Jahrhundert: Funktionen komplexer Variabler	166

3. Einiges über den Schulbetrieb	167
4. Der Standpunkt der Funktionentheorie	169
Der Grenzübergang von der Potenz zur Exponentialfunktion	173
II. Die goniometrischen Funktionen	175
1. Theorie der goniometrischen Funktionen	175
Genauer Vergleich mit der Lehre vom Logarithmus	176
2. Trigonometrische Tafelwerke	183
A. Rein trigonometrische Tafeln	183
B. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln	185
3. Anwendungen der goniometrischen Funktionen	188
A. Trigonometrie, insbesondere sphärische Trigonometrie	189
Grundbegriffe der sphärischen Trigonometrie	189
Formeln zweiter Stufe; Dreiecke erster und zweiter Art	194
Der Flächeninhalt sphärischer Dreiecke; Ergänzungsrelation	197
B. Lehre von den kleinen Schwingungen, insbesondere Pendelschwingungen	201
Darstellung auf der Schule (versteckte Infinitesimalrechnung)	202
C. Darstellung periodischer Funktionen durch Reihen goniometrischer Funktionen (trigonometrische Reihen)	205
Approximation durch Reihen mit endlicher Gliederzahl	206
Fehlerabschätzung; Konvergenz der unendlichen Reihe	211
Das Gibbs'sche Phänomen	214
Exkurs über den allgemeinen Funktionsbegriff	215
Historische Bedeutung der trigonometrischen Reihen; die Stellung Fouriers	221
III. Von der eigentlichen Infinitesimalrechnung	223
1. Allgemeine Ausführungen zur Infinitesimalrechnung	223
Entstehung der Infinitesimalrechnung aus der Eigenart unserer sinnlichen Anschauung	224
Logische Begründung der Infinitesimalrechnung mittels des Grenzbegriffes (Newton und seine Nachfolger bis hin zu Cauchy)	228
Aufbau der Infinitesimalrechnung unter Voranstellung der „Differentialrechenrechnung“ (Leibniz und seine Anhänger)	231
Die aktuell unendlich kleinen Größen in der modernen Axiomatik der Geometrie	234
Die Reaktion: der Derivationskalkül von Lagrange	237
Form und Bedeutung der Infinitesimalrechnung im herrschenden Schulbetrieb	239
2. Der Taylorsche Lehrsatz	241
Die ersten Schmiegungsparabeln bei vorgegebenen Kurven	241
Ansteigen der Ordnung: Frage der Konvergenz	244
Verallgemeinerung des Taylorschen Satzes zu einem Theorem der Differenzenrechnung	246
Zugehörige Restabschätzung von Cauchy	249
Historischer Exkurs (Taylor und Maclaurin)	251
3. Historische und pädagogische Betrachtungen	253
Einiges über Lehrbuchliteratur der Infinitesimalrechnung	253
Charakterisierung unserer eigenen Darstellung	254

IV. Anhang	256
IVa. Transzendenz von e und π	256
Historisches	256
Beweis der Transzendenz von e	257
Beweis der Transzendenz von π	263
Weiteres über transzendente und algebraische Zahlen	269
IVb. Die Mengenlehre	271
1. Die Mächtigkeit von Mengen	271
Abzählbarkeit der rationalen und algebraischen Zahlen	273
Nichtabzählbarkeit des Kontinuums	276
Mächtigkeit der mehrdimensionalen Kontinua	278
Mengen von höherer Mächtigkeit.	281
2. Anordnung der Elemente einer Menge	283
Anordnungstypen abzählbarer Mengen	284
Die Stetigkeit des Kontinuums	285
Invarianz der Dimensionenzahl bei eindeutiger stetiger Abbildung.	286
Schlußbemerkungen	287
Bedeutung und Ziele der Mengenlehre	287
Anschließende Bemerkungen über den Schulunterricht	289
Zusatz 1: Über die Bestrebungen zur Reform des mathematischen Unterrichts	290
Zusatz 2: Ergänzungen zur mathematischen und didaktischen Literatur	298
Namenverzeichnis	304
Sachverzeichnis	306