

# Inhalt

## I. Grundlagen

1. Zahlen	17
1.1. Die natürlichen und die ganzen Zahlen	17
1.2. Die rationalen Zahlen	18
1.3. Die reellen Zahlen	19
1.3.1. Irrationale Zahlen	19
1.3.2. Intervallschachtelung	20
1.3.3. Grundgesetze der Arithmetik	22
1.4. Die komplexen Zahlen	24
1.5. Das Rechnen mit Ungleichungen und absoluten Beträgen	29
1.5.1. Ungleichungen	29
1.5.2. Absolute Beträge	33
1.6. Das Rechnen mit Näherungswerten	35
1.7. Zahlensystem	37
1.8. Übungsaufgaben	39
2. Mengen	41
2.1. Der Begriff der Menge	41
2.2. Einige Eigenschaften von Mengen	42
2.3. Zahlenmengen	44
2.4. Punktmengen	47
2.4.1. Lineare Punktmengen	47
2.4.2. Ebene Punktmengen	49
3. Zahlenfolgen	52
3.1. Der Begriff der Zahlenfolge	52
3.2. Häufungswerte	56
3.2.1. Häufungswert einer Zahlenfolge	56
3.2.2. Häufungsgrenzen einer Zahlenfolge	57
3.2.3. Untere und obere Grenze einer Zahlenfolge	58
3.3. Konvergente Zahlenfolgen	60
3.3.1. Definitionen. Erstes Konvergenzkriterium	60
3.3.2. Eigenschaften konvergenter Zahlenfolgen	65
3.3.3. Wichtige Beispiele konvergenter Zahlenfolgen	67
3.4. Monotone Zahlenfolgen	70
3.4.1. Definition	70
3.4.2. Zweites Konvergenzkriterium	71

3.4.3. Die Zahl $e$ .....	73
3.4.4. Anwendung des zweiten Konvergenzkriteriums auf Intervallschachtelungen .....	74
3.5. Das allgemeine Konvergenzkriterium von CAUCHY .....	75
3.6. Übungsaufgaben .....	77
<b>4. Der binomische Lehrsatz. Kombinatorik .....</b>	<b>78</b>
4.1. Binomialkoeffizienten .....	78
4.2. Der binomische Lehrsatz .....	81
4.3. Der polynomische Lehrsatz .....	83
4.4. Permutationen .....	85
4.5. Variationen .....	87
4.6. Kombinationen .....	89
4.7. Übungsaufgaben .....	90

## II. Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen

<b>5. Der Funktionsbegriff .....</b>	<b>92</b>
5.1. Definitionen und Beispiele .....	92
5.2. Zur Darstellung von Funktionen .....	94
5.2.1. Darstellung durch eine Formel .....	95
5.2.2. Darstellung durch eine Tabelle .....	96
5.2.3. Graphische Darstellung .....	96
5.3. Einige Grundbegriffe .....	102
5.3.1. Monotone Funktionen .....	102
5.3.2. Gerade und ungerade Funktionen .....	103
5.3.3. Periodische Funktionen .....	104
5.3.4. Der Begriff der Umkehrfunktion .....	106
5.3.5. Der Begriff der mittelbaren Funktion .....	108
5.4. Übungsaufgaben .....	109
<b>6. Grenzwert einer Funktion .....</b>	<b>110</b>
6.1. Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow x_0$ .....	110
6.2. Einseitige Grenzwerte .....	114
6.3. Grenzwertsätze .....	117
6.4. Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ oder $x \rightarrow -\infty$ .....	126
6.5. Uneigentliche Grenzwerte .....	128
6.6. Übungsaufgaben .....	132
<b>7. Stetigkeit einer Funktion .....</b>	<b>134</b>
7.1. Definition der Stetigkeit .....	134
7.2. Einseitige Stetigkeit .....	137
7.3. Unstetigkeiten .....	140
7.4. Eigenschaften stetiger Funktionen .....	145
7.4.1. Das Rechnen mit stetigen Funktionen .....	145
7.4.2. Stetigkeit der mittelbaren Funktion .....	146
7.4.3. Stetigkeit der Umkehrfunktion .....	147
7.5. Funktionen, die auf einem abgeschlossenen Intervall stetig sind .....	147
7.6. Die Regula falsi .....	151
7.7. Übungsaufgaben .....	153

8. Ganze rationale Funktionen .....	153
8.1. Allgemeine Eigenschaften .....	153
8.1.1. Grundbegriffe .....	153
8.1.2. Lineare Funktion .....	155
8.1.3. Quadratische Funktion .....	157
8.1.4. Allgemeine Eigenschaften von Polynomen .....	158
8.2. Potenzfunktionen mit positiven ganzen Exponenten .....	162
8.3. Ermittlung von Funktionswerten .....	164
8.3.1. Das Verfahren von <b>HORNER</b> .....	164
8.3.2. Das Verfahren von <b>LILL</b> .....	165
8.4. Interpolation .....	166
8.4.1. Allgemeine Bemerkungen .....	166
8.4.2. Interpolationsformel von <b>LAGRANGE</b> .....	168
8.4.3. Interpolationsformel von <b>NEWTON</b> .....	170
8.5. Zur Lösung algebraischer Gleichungen .....	179
8.5.1. Allgemeine Bemerkungen .....	179
8.5.2. Kubische Gleichungen .....	181
8.5.3. Das Verfahren von <b>GRAEFFE</b> .....	183
8.6. Übungsaufgaben .....	188
9. Rationale und algebraische Funktionen .....	189
9.1. Definition und grundlegende Eigenschaften der rationalen Funktionen .....	189
9.2. Teilbruchzerlegung der rationalen Funktionen .....	194
9.3. Potenzfunktionen mit negativen ganzen Exponenten .....	195
9.4. Algebraische Funktionen .....	198
9.5. Übungsaufgaben .....	201
10. Exponential- und Logarithmusfunktionen .....	201
10.1. Potenzen .....	201
10.1.1. Potenzen mit ganzen Exponenten .....	202
10.1.2. Potenzen mit rationalen Exponenten .....	202
10.1.3. Potenzen mit reellen Exponenten .....	204
10.2. Definition und Eigenschaften der Exponentialfunktionen .....	205
10.3. Definition und Eigenschaften der Logarithmusfunktionen .....	212
10.4. Potenzfunktionen mit beliebigen reellen Exponenten .....	215
10.5. Einige spezielle Grenzwerte .....	217
10.6. Logarithmische Funktionsleitern und Funktionspapiere .....	218
10.6.1. Logarithmische Funktionsleiter .....	218
10.6.2. Doppeltlogarithmisches Funktionspapier .....	218
10.6.3. Einfachlogarithmisches Funktionspapier .....	220
10.7. Übungsaufgaben .....	222
11. Trigonometrische Funktionen und Arcus-Funktionen .....	223
11.1. Winkelmessung .....	223
11.2. Sinus- und Kosinusfunktion .....	224
11.3. Tangens- und Kotangensfunktion .....	227
11.4. Trigonometrische Darstellung der komplexen Zahlen .....	232

11.5. Schwingungen .....	237
11.5.1. Begriff der harmonischen Schwingung .....	237
11.5.2. Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz und gleicher Schwingungsrichtung .....	238
11.5.3. Schwebungen .....	242
11.5.4. Überlagerung bei verschiedener Schwingungsrichtung .....	245
11.6. Arcus-Funktionen .....	248
11.7. Übungsaufgaben .....	255
12. Hyperbolische Funktionen und Area-Funktionen .....	256
12.1. Definition und Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen .....	256
12.2. Definition und Eigenschaften der Area-Funktionen .....	261
12.3. Geometrische Deutung der Hyperbelfunktionen .....	265
12.4. Übungsaufgaben .....	269
<b>III. Differentialrechnung für Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen</b>	
13. Begriff der Ableitung .....	270
13.1. Vorbemerkung .....	270
13.2. Definition der Ableitung .....	270
13.3. Einseitige Ableitungen .....	273
13.4. Uneigentliche Ableitungen .....	274
13.5. Geometrische Bedeutung der Ableitung .....	275
13.6. Anwendungen der Ableitung in den Naturwissenschaften .....	277
13.7. Weierstraßsche Zerlegungsformel .....	281
13.8. Stetigkeit und Differenzierbarkeit .....	282
13.9. Übungsaufgaben .....	283
14. Allgemeine Regeln über Ableitungen .....	283
14.1. Ableitung einer Konstanten .....	283
14.2. Ableitung einer Linearkombination von Funktionen .....	284
14.3. Ableitung eines Produktes von Funktionen .....	285
14.4. Ableitung eines Quotienten von Funktionen .....	286
14.5. Ableitung einer mittelbaren Funktion .....	288
14.6. Übungsaufgaben .....	290
15. Ableitung elementarer transzendenter Funktionen .....	290
15.1. Trigonometrische Funktionen .....	290
15.2. Exponentialfunktionen .....	293
15.3. Hyperbolische Funktionen .....	294
15.4. Übungsaufgaben .....	296
16. Ableitung der Umkehrfunktion .....	296
16.1. Allgemeine Bemerkungen .....	296
16.2. Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten .....	299
16.3. Arcus-Funktionen .....	300
16.4. Logarithmusfunktionen .....	303
16.5. Potenzfunktionen mit beliebigen reellen Exponenten .....	305
16.6. Area-Funktionen .....	307
16.7. Übungsaufgaben .....	307

17. Das Differential einer Funktion .....	308
17.1. Definition .....	308
17.2. Geometrische Bedeutung des Differentials .....	309
17.3. Funktionszuwachs und Differential .....	311
17.4. Anwendungen in der Fehlerrechnung .....	311
17.5. Übungsaufgaben .....	312
18. Höhere Ableitungen .....	313
18.1. Definition der Ableitung $n$ -ter Ordnung .....	313
18.2. Höhere Ableitungen einiger elementarer Funktionen .....	315
18.2.1. Potenzfunktionen .....	315
18.2.2. Exponential- und Logarithmusfunktionen .....	316
18.2.3. Trigonometrische Funktionen .....	316
18.2.4. Ableitungen eines Produktes von Funktionen .....	317
18.3. Zur physikalischen Bedeutung der zweiten Ableitung .....	317
18.4. Differentiale höherer Ordnung .....	319
18.5. Übungsaufgaben .....	319
19. Mittelwertsätze der Differentialrechnung .....	320
19.1. Satz von ROLLE .....	320
19.2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung .....	322
19.3. Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung .....	326
19.4. Übungsaufgaben .....	327
20. Berechnung von Grenzwerten .....	327
20.1. Vorbemerkung .....	327
20.2. Erste Regel von BERNOULLI-DE L'HOSPITAL .....	329
20.3. Zweite Regel von BERNOULLI-DE L'HOSPITAL .....	332
20.4. Grenzwerte der Form $\lim_{x \rightarrow x_0} \{f_1(x) \cdot f_2(x)\}$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} \{f_1(x) + f_2(x)\}$ .....	335
20.5. Grenzwerte der Form $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) f_2(x)$ .....	337
20.6. Übungsaufgaben .....	340
21. Parameterdarstellung von Kurven .....	341
21.1. Einführung der Parameterdarstellung .....	341
21.2. Ableitungen in Parameterdarstellung .....	347
21.3. Die Gleichung der Kurventangente .....	350
21.4. Die Gleichung der Kurvennormalen .....	352
21.5. Übungsaufgaben .....	352
22. Polarkoordinaten .....	353
22.1. Definition und Beispiele .....	353
22.2. Ableitungen in Polarkoordinaten .....	357
22.3. Übungsaufgaben .....	360
23. Untersuchung des Verhaltens von Funktionen .....	360
23.1. Vorbemerkung .....	360
23.2. Bedeutung des Vorzeichens der ersten Ableitung .....	361
23.3. Extremwerte .....	362

23.4. Bedeutung des Vorzeichens der zweiten Ableitung .....	371
23.5. Wendepunkte .....	373
23.6. Übungsaufgaben .....	377
24. Graphische, numerische und instrumentelle Verfahren zur Bestimmung der Ableitung einer Funktion .....	378
24.1. Graphische Differentiation .....	378
24.2. Numerische Differentiation .....	379
24.3. Instrumentelle Differentiation .....	380
24.4. Übungsaufgaben .....	381
25. Näherungsweise Berechnung von Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ .....	382
25.1. Iterationsverfahren .....	382
25.2. Das Newtonsche Verfahren .....	388
25.3. Das verallgemeinerte Iterationsverfahren .....	393
25.4. Übungsaufgaben .....	393
<b>IV. Integralrechnung für Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen</b>	
26. Das bestimmte Integral .....	396
26.1. Zur Problemstellung .....	396
26.2. Intervallzerlegungen .....	398
26.3. Definition des bestimmten Integrals .....	399
26.4. Einige integrierbare Funktionenklassen .....	405
26.5. Beispiele für die direkte Berechnung bestimmter Integrale .....	406
26.6. Anwendungen des Integralbegriffs in den Naturwissenschaften .....	408
26.6.1. Begriff der Arbeit einer Kraft .....	408
26.6.2. Statisches Moment und Trägheitsmoment einer ebenen homogenen Massenverteilung .....	409
26.6.3. Schwerpunkt einer ebenen homogenen Massenverteilung .....	413
26.7. Übungsaufgaben .....	413
27. Eigenschaften des bestimmten Integrals .....	414
27.1. Eigenschaften, die das Integrationsintervall betreffen .....	414
27.2. Eigenschaften, die den Integranden betreffen .....	415
27.3. Ungleichungen zwischen Integralen .....	416
27.4. Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung .....	420
27.5. Übungsaufgaben .....	423
28. Das unbestimmte Integral .....	424
28.1. Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze .....	424
28.2. Definition des unbestimmten Integrals .....	427
28.3. Zusammenhang mit der Differentialrechnung .....	429
28.4. Übungsaufgaben .....	431
29. Technik des Integrierens .....	432
29.1. Grundintegrale .....	432
29.2. Substitutionsmethode .....	434
29.3. Anwendung der Substitutionsmethode auf bestimmte Integrale .....	438

29.4. Methode der partiellen Integration .....	440
29.5. Rekursionsformeln .....	446
29.6. Übungsaufgaben .....	448
30. Technik des Integrierens (Fortsetzung) .....	450
30.1. Integration der rationalen Funktionen .....	450
30.1.1. Zur Herstellung der Teilbruchzerlegung .....	450
30.1.2. Integrale der Form $\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx$ .....	457
30.1.3. Integrale der Form $\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^l} dx$ ; $l > 1$ , ganz .....	461
30.2. Integration einiger spezieller nichtrationaler Funktionen .....	461
30.3. Zur Tragweite der Integrationsverfahren .....	466
30.4. Übungsaufgaben .....	467
31. Uneigentliche Integrale .....	468
31.1. Erweiterung des Integralbegriffs .....	468
31.2. Integrale mit unbeschränkten Integranden .....	469
31.3. Integrale über unbeschränkte Integrationsintervalle .....	475
31.4. Zum Rechnen mit uneigentlichen Integralen .....	481
31.5. Hauptwert eines uneigentlichen Integrals .....	482
31.6. Übungsaufgaben .....	483
32. Einige Anwendungen der Integralrechnung auf die ebene Geometrie .....	484
32.1. Flächeninhalt ebener Bereiche .....	484
32.2. Bogenlänge einer ebenen Kurve .....	493
32.3. Krümmung einer ebenen Kurve .....	497
32.4. Übungsaufgaben .....	502
33. Graphische und numerische Integration .....	503
33.1. Graphische Integration .....	503
33.2. Numerische Integration .....	507
33.2.1. Rechteckformeln .....	508
33.2.2. Sehnentrapezformel .....	508
33.2.3. Tangententrapezformel .....	509
33.2.4. Keplersche Formel .....	509
33.2.5. Simpsonsche Formel .....	511
33.3. Einige Bemerkungen zur instrumentellen Integration .....	513
33.4. Übungsaufgaben .....	514

## V. Reihen

34. Unendliche Reihen .....	515
34.1. Definitionen .....	515
34.2. Unmittelbare Berechnung der Reihensumme $s$ .....	519
34.3. Zwei Konvergenzkriterien .....	520
34.4. Das Rechnen mit unendlichen Reihen .....	522
34.5. Übungsaufgaben .....	523

35. Reihen mit positiven Gliedern .....	524
35.1. Hauptkriterium für Reihen mit positiven Gliedern .....	524
35.2. Vergleichskriterien .....	525
35.3. Quotientenkriterium .....	526
35.4. Wurzelkriterium .....	529
35.5. Übungsaufgaben .....	530
36. Reihen mit beliebigen Gliedern .....	531
36.1. Alternierende Reihen .....	531
36.2. Absolut konvergente Reihen .....	533
36.3. Konvergenzkriterien für absolut konvergente Reihen .....	534
36.4. Unbedingt konvergente Reihen .....	537
36.5. Multiplikation unendlicher Reihen .....	540
36.6. Übungsaufgaben .....	543
37. Funktionenfolgen und Funktionenreihen .....	544
37.1. Definition .....	544
37.2. Gleichmäßig konvergente Reihen .....	546
37.3. Gliedweise Integration und Differentiation .....	552
37.4. Übungsaufgaben .....	556
38. Potenzreihen .....	556
38.1. Konvergenzverhalten von Potenzreihen .....	556
38.2. Eigenschaften der Reihensumme $s(x)$ .....	560
38.3. Übungsaufgaben .....	565
39. Taylorsche Formel und Taylorsche Reihe .....	566
39.1. Entwicklung eines Polynoms .....	566
39.2. Taylorsche Formel .....	567
39.3. Taylorsche Reihe .....	571
39.4. Entwicklung der elementaren Funktionen .....	573
39.4.1. Entwicklung der Exponentialfunktion .....	573
39.4.2. Entwicklung der trigonometrischen Funktionen .....	574
39.4.3. Entwicklung der Logarithmusfunktion .....	575
39.4.4. Entwicklung der Funktion $(1+x)^\alpha$ .....	576
39.5. Übungsaufgaben .....	578
40. Anwendung der Taylorschen Formel und Taylorschen Reihe .....	579
40.1. Numerische Berechnung der Funktionswerte elementarer Funktionen .....	579
40.1.1. Zur Problemstellung .....	579
40.1.2. Exponentialfunktion. Berechnung von $e$ .....	579
40.1.3. Trigonometrische Funktionen .....	581
40.1.4. Berechnung von Wurzeln .....	582
40.2. Näherungsformeln .....	583
40.3. Zur Theorie der Extremwerte und Wendepunkte .....	586
40.4. Übungsaufgaben .....	589



41. Fourier-Reihen .....	589
41.1. Orthogonalität des trigonometrischen Fundamentalsystems .....	589
41.2. Trigonometrische Reihen und Fourier-Reihen .....	592
41.3. Fourier-Reihen für gerade und ungerade Funktionen .....	597
41.4. Fourier-Reihen in komplexer Form .....	602
41.5. Fourier-Reihen für Funktionen der Periode $2p$ .....	604
41.6. Zum Konvergenzverhalten von Fourier-Reihen .....	605
41.7. Summierbarkeit von Fourier-Reihen .....	608
41.8. Zur numerischen Durchführung der harmonischen Analyse .....	609
41.8.1. Das Verfahren von RUNGE .....	609
41.8.2. Das Verfahren von FISCHER-HINNEN .....	611
41.9. Übungsaufgaben .....	613
42. Orthogonale Funktionensysteme .....	614
42.1. Grundbegriffe und Beispiele .....	614
42.2. Fourier-Reihen bezüglich eines beliebigen orthogonalen Funktionensystems .....	616
42.3. Vollständige Funktionensysteme .....	621
42.4. Übungsaufgaben .....	626

**VI. Anschauliche Vektorrechnung und Analytische Geometrie**

43. Vektorbegriff. Rechnen mit Vektoren .....	628
43.1. Begriff des Vektors .....	628
43.2. Addition und Subtraktion von Vektoren .....	630
43.3. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar .....	632
43.4. Vorbereitende Betrachtungen zur Multiplikation von Vektoren .....	634
43.4.1. Orientierung einer Ebene .....	634
43.4.2. Rechtssystem .....	635
43.4.3. Winkel zwischen gerichteten Geraden und Winkel zwischen Vektoren .....	635
43.4.4. Orthogonale Vektoren .....	636
43.4.5. Projektion eines Vektors auf eine gerichtete Gerade .....	636
43.5. Zerlegung von Vektoren nach gegebenen Richtungen .....	637
43.6. Skalares Produkt zweier Vektoren .....	640
43.7. Vektoriell Produkt zweier Vektoren .....	644
43.8. Übungsaufgaben .....	649
44. Vektorrechnung unter Verwendung eines Koordinatensystems .....	650
44.1. Koordinatensystem .....	650
44.2. Ortsvektoren .....	651
44.3. Komponenten und Koordinaten eines Vektors .....	652
44.4. Rechnen mit Vektoren in Koordinaten-Schreibweise .....	653
44.5. Determinanten .....	656
44.6. Zusammengesetzte Produkte von Vektoren .....	659
44.6.1. Spatprodukt .....	659
44.6.2. Andere zusammengesetzte Produkte .....	663
44.7. Übungsaufgaben .....	664

45. Gerade und Ebene .....	666
45.1. Grundbegriffe .....	666
45.1.1. Richtungskosinus .....	666
45.1.2. Teilverhältnis .....	667
45.1.3. Flächeninhalt und Volumen .....	669
45.1.4. Transformation des Koordinatensystems .....	669
45.2. Gleichung der Geraden .....	673
45.3. Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden .....	679
45.4. Gleichung der Ebene .....	683
45.5. Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen .....	687
45.6. Lagebeziehungen zwischen Ebene und Gerade .....	689
45.7. Übungsaufgaben .....	690
46. Kurven und Flächen zweiter Ordnung .....	693
46.1. Kreis und Kugel .....	693
46.2. Kurven zweiter Ordnung .....	695
46.3. Flächen zweiter Ordnung .....	701
46.3.1. Vorbemerkungen .....	701
46.3.2. Allgemeine Gleichung und Klassifikation der Flächen zweiter Ordnung .....	703
46.3.3. Diskussion der nichtentarteten Flächen zweiter Ordnung .....	706
46.4. Übungsaufgaben .....	709
Namenverzeichnis .....	711
Sachverzeichnis .....	712
Tabelle 1: Zur Theorie der Extremwerte (als Beilage)	
Tabelle 2: Zur Theorie der Extremwerte (als Beilage)	