

Inhalt

I. Grundbegriffe der Analysis und Topologie

1. Mengentheoretische Hilfsmittel	13
1.1. Elemente und Mengen	13
1.2. Operationen auf Mengen	16
1.3. Mengenprodukte	21
1.4. Mengenfolgen und Mengenfamilien	23
1.5. Mengensysteme	25
1.6. Übungsaufgaben	27
2. Relationen und Abbildungen	28
2.1. Relationen	28
2.2. Operationen auf Relationen	30
2.3. Abbildungen	33
2.4. Äquivalenzrelationen	37
2.5. Ordnungsrelationen	39
2.6. Boolesche Algebra	44
2.7. Schaltalgebra	46
2.8. Übungsaufgaben	49
3. Topologische Räume	51
3.1. Begriff des topologischen Raumes	51
3.2. Basen. Hausdorff-Räume	56
3.3. Stetige Abbildungen	59
3.4. Konvergenz	62
3.5. Produkttopologien	64
3.6. Kompaktheit	66
3.7. Lineare topologische Räume	69
3.7.1. Lineare Räume	69
3.7.2. Lineare topologische Räume	71
3.8. Übungsaufgaben	74
4. Metrische Räume	76
4.1. Begriff des metrischen Raumes	76
4.2. Konvergenz und Stetigkeit	82
4.3. Kompaktheit und Separabilität	86
4.4. Übungsaufgaben	89

5. Normierte Räume	90
5.1. Begriff des normierten Raumes	90
5.2. Banachräume	97
5.3. Hilberträume	99
5.4. Übungsaufgaben	105
6. Die Räume R^n und K^n	106
6.1. Der Raum R^n	106
6.2. Konvexe Mengen im R^n	109
6.3. Der Raum K^n	116
6.4. Übungsaufgaben	117

II. Lineare Algebra

7. Vektorräume	118
7.1. Grundbegriffe	118
7.2. Basis eines Vektorraumes	120
7.3. Unterräume. Lineare Mannigfaltigkeiten	125
7.4. Faktorräume	133
7.5. Übungsaufgaben	135
8. Lineare Abbildungen	136
8.1. Lineare Funktionale	136
8.2. Lineare Abbildungen von Vektorräumen in Vektorräume	138
8.3. Lineare Funktionen $l: R^n \rightarrow R^m$	142
8.4. Lineare Operatoren	144
8.5. Übungsaufgaben	145
9. Matrizen	145
9.1. Begriff der Matrix	145
9.2. Rechenoperationen	151
9.3. Spezielle Matrizen	156
9.3.1. Quadratische Matrizen	156
9.3.2. Orthogonale Matrizen	159
9.3.3. Zerlegung einer Matrix in Teilmatrizen (Partitionierung)	159
9.4. Lineare Abbildungen und Matrizen	161
9.5. Rang einer Matrix	165
9.6. Inverse einer Matrix	168
9.7. Lineare Vierpole	169
9.8. Zur Anwendung der Matrizenrechnung in der Betriebswirtschaft	175
9.9. Übungsaufgaben	179
10. Lineare Gleichungen	179
10.1. Homogene und inhomogene Systeme	179
10.2. Lösungsstruktur von Gleichungssystemen	183
10.3. Gaußscher Algorithmus	187
10.4. Übungsaufgaben	191

11. Determinanten	192
11.1. Begriff der Determinante	192
11.2. Eigenschaften von Determinanten	198
11.3. Entwicklungssätze	201
11.4. Rang einer Matrix	204
11.5. Cramersche Regel	205
11.6. Zur Berechnung der inversen Matrix	208
11.7. Übungsaufgaben	211
12. Das Eigenwertproblem	213
12.1. Eigenwerte und Eigenvektoren	213
12.2. Ähnliche Matrizen	218
12.3. Das Eigenwertproblem für hermitesche und symmetrische Matrizen	221
12.4. Diagonalisierung symmetrischer Matrizen	226
12.5. Das Eigenwertproblem für reelle, nichtsymmetrische Matrizen	227
12.6. Übungsaufgaben	227
13. Quadratische Formen	229
13.1. Bilinearformen und quadratische Formen	229
13.2. Definite quadratische Formen	234
13.3. Geometrische Deutung der quadratischen Formen	237
13.4. Die Gramsche Determinante	239
13.5. Übungsaufgaben	240

III. Funktionen von mehreren Veränderlichen

14. Der Funktionsbegriff	242
14.1. Vorbetrachtungen	242
14.2. Funktionen $f: R^n \rightarrow R$	243
14.3. Funktionen $f: R \rightarrow R^n$	245
14.4. Funktionen $f: R^n \rightarrow R^m$	247
14.5. Räumliche Koordinatensysteme	249
14.5.1. Zylinderkoordinaten	249
14.5.2. Kugelkoordinaten	250
14.6. Übungsaufgaben	252
15. Grenzwert und Stetigkeit	253
15.1. Grenzwert einer Funktion	253
15.2. Iterierte Grenzwerte	258
15.3. Stetigkeit einer Funktion	259
15.4. Halbstetigkeit einer Funktion	264
15.5. Übungsaufgaben	266
16. Konvexe Funktionen	268
16.1. Eigenschaften konvexer Funktionen	268
16.2. Stetigkeit konvexer Funktionen	272
16.3. Übungsaufgaben	274

IV. Differentialrechnung für Funktionen von mehreren Veränderlichen

17. Differenzierbare Funktionen	275
17.1. Begriff der partiellen Ableitung	275
17.2. Partielle Ableitungen höherer Ordnung	278
17.3. Begriff der differenzierbaren Funktion	283
17.4. Übungsaufgaben	291
18. Differenzierbare Funktionen (Fortsetzung)	292
18.1. Das Rechnen mit differenzierbaren Funktionen	292
18.2. Anwendung des vollständigen Differentials	299
18.2.1. Zur geometrischen Deutung des vollständigen Differentials	299
18.2.2. Anwendung des vollständigen Differentials in der Fehlerrechnung	299
18.2.3. Anwendung von Differentialen in der Thermodynamik	303
18.3. Richtungsableitung	306
18.4. Mehrfach differenzierbare Funktionen	309
18.5. Differentiale höherer Ordnung	310
18.6. Differenzierbarkeit konvexer Funktionen	311
18.7. Zur Differentiation einer Determinante	314
18.8. Übungsaufgaben	315
19. Mittelwertsatz und Taylorsche Formel	318
19.1. Mittelwertsatz	318
19.2. Taylorsche Formel	320
19.3. Übungsaufgaben	325
20. Implizite Funktionen	326
20.1. Implizit definierte reellwertige Funktionen	326
20.2. Implizit definierte vektorwertige Funktionen	331
20.3. Implizite Differentiation implizit definierter Funktionen	334
20.4. Inverse Abbildungen	338
20.5. Funktionale Abhängigkeit	344
20.6. Übungsaufgaben	348
21. Extremwertaufgaben	351
21.1. Extremwertaufgaben ohne Restriktionen	351
21.2. Extremwertaufgaben mit Restriktionen	362
21.3. Übungsaufgaben	373
22. Differentialoperatoren der Vektoranalysis	375
22.1. Skalarfelder und Vektorfelder	375
22.2. Der Gradient eines Skalarfeldes	376
22.3. Die Divergenz eines Vektorfeldes	380
22.4. Die Rotation eines Vektorfeldes	385
22.5. Wiederholte Anwendung des Operators ∇	387
22.6. Krümmungslinige Koordinaten	390
22.7. Übungsaufgaben	399

V. Integralrechnung für Funktionen von mehreren Veränderlichen

23. Parameterintegrale	401
23.1. Begriff des Parameterintegrals	401
23.2. Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Parameterintegralen	404
23.3. Integration von Parameterintegralen	407
23.4. Gleichmäßige Konvergenz	410
23.4.1. Gleichmäßige Konvergenz einer Funktion	410
23.4.2. Gleichmäßige Konvergenz von Integralen	411
23.4.3. Eigenschaften gleichmäßig konvergenter uneigentlicher Parameter- integrale	413
23.5. Die Eulersche Gammafunktion	415
23.6. Übungsaufgaben	419
24. Kurvenintegrale	421
24.1. Parameterdarstellung von Raumkurven	421
24.2. Kurvenintegrale erster Art	423
24.3. Kurvenintegrale zweiter Art	429
24.4. Unabhängigkeit des Kurvenintegrals zweiter Art vom Weg	434
24.5. Ermittlung des Potentials $u(\mathbf{x})$ eines Potentialfeldes $v(\mathbf{x})$	440
24.6. Kurvenintegrale in der Thermodynamik	444
24.7. Vektorielle Kurvenintegrale	447
24.8. Zusammenhang zwischen Kurvenintegralen erster und zweiter Art	449
24.9. Übungsaufgaben	451
25. Ebene Bereichsintegrale	453
25.1. Meßbare Punktengen	453
25.2. Begriff und Eigenschaften des ebenen Bereichsintegrals	455
25.3. Zurückführung ebener Bereichsintegrale auf Doppelintegrale	459
25.4. Einige weitere Anwendungen ebener Bereichsintegrale	463
25.5. Transformation ebener Bereichsintegrale	466
25.6. Uneigentliche ebene Bereichsintegrale	470
25.7. Zusammenhang zwischen ebenen Bereichsintegralen und Kurvenintegralen (Satz von GAUSS)	474
25.8. Übungsaufgaben	477
26. Räumliche Bereichsintegrale	480
26.1. Begriff und Eigenschaften des räumlichen Bereichsintegrals	480
26.2. Zurückführung räumlicher Bereichsintegrale auf Dreifachintegrale	482
26.3. Anwendungen räumlicher Bereichsintegrale	485
26.4. Transformation räumlicher Bereichsintegrale	489
26.5. Uneigentliche räumliche Bereichsintegrale	495
26.6. Übungsaufgaben	498
27. Oberflächenintegrale	501
27.1. Parameterdarstellung von Flächen im Raum	501
27.2. Orientierbare Flächen. Oberflächenelement	508
27.3. Oberflächenintegrale erster Art	514
27.4. Oberflächenintegrale zweiter Art	520
27.5. Übungsaufgaben	524

28. Integralsätze der Vektoranalysis	526
28.1. Der Gaußsche Integralsatz	526
28.2. Der Stokessche Integralsatz	532
28.3. Die Greenschen Integralsätze	538
28.4. Übungsaufgaben	541
Lösungen	545
Literatur	571
Namenverzeichnis	573
Sachverzeichnis	574