

Inhalt

I. Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Grundbegriffe	15
1.1. Einteilung der Differentialgleichungen	15
1.2. Differentialgleichung und Kurvenschar	17
1.3. Beispiele	19
1.4. Anfangswert-, Randwert- und Eigenwertprobleme	28
1.5. Übungsaufgaben	31
2. Differentialgleichungen erster Ordnung	32
2.1. Richtungsfeld einer Differentialgleichung. Existenz und Unität der Lösungen	32
2.2. Trennung der Veränderlichen	36
2.3. Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen	46
2.4. Lineare Differentialgleichungen	52
2.5. Exakte Differentialgleichungen	58
2.5.1. Lösung der exakten Differentialgleichung	58
2.5.2. Integrierender Faktor	61
2.6. Zur Methode der sukzessiven Approximationen	64
2.7. Trajektorien	74
2.8. Implizite Differentialgleichungen	78
2.8.1. Elementare Lösungsmethoden	78
2.8.2. Singuläre Lösungen	83
2.8.3. Einhüllende	85
2.9. Übungsaufgaben	87
3. Differentialgleichungen höherer Ordnung	90
3.1. Zusammenhang einer Differentialgleichung n -ter Ordnung mit einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung	90
3.2. Betrachtung von Sonderfällen	91
3.2.1. Die Differentialgleichung $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$	91
3.2.2. Die Differentialgleichung $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$	95
3.2.3. Die Differentialgleichung $\frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$	99
3.2.4. Homogene implizite Differentialgleichungen	99
3.3. Übungsaufgaben	100
4. Lineare Differentialgleichungen	101
4.1. Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	101
4.1.1. Homogene lineare Differentialgleichungen	101
4.1.2. Inhomogene lineare Differentialgleichungen	111

4.2. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	117
4.2.1. Homogene lineare Differentialgleichungen	117
4.2.2. Inhomogene lineare Differentialgleichungen	120
4.3. Eulersche Differentialgleichungen	126
4.4. Die Schwingungsdifferentialgleichung	130
4.4.1. Freie Schwingungen	130
4.4.1.1. Ungedämpfte Schwingungen	131
4.4.1.2. Gedämpfte Schwingungen	131
4.4.2. Erzwungene Schwingungen	135
4.4.2.1. Ungedämpfte Schwingungen	135
4.4.2.2. Gedämpfte Schwingungen	136
4.4.3. Der elektrische Schwingkreis	137
4.4.4. Zur Analogie zwischen mechanischen und elektrischen Schwingungen ..	141
4.5. Integration von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch Reihen	142
4.5.1. Integration durch Potenzreihen	142
4.5.2. Integration durch verallgemeinerte Potenzreihen	146
4.6. Die Besselsche Differentialgleichung	151
4.7. Übungsaufgaben	162
5. Systeme von Differentialgleichungen	167
5.1. Existenz- und Unitätsaussagen für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung	167
5.2. Lineare Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung	176
5.3. Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	182
5.4. Übungsaufgaben	192
6. Randwert- und Eigenwertprobleme	195
6.1. Randwertprobleme	195
6.1.1. Einführende Bemerkungen	195
6.1.2. Zur Lösung eines halbhomogenen linearen Randwertproblems mit Hilfe der Greenschen Funktion	199
6.2. Eigenwertprobleme	209
6.3. Übungsaufgaben	214
7. Stabilität	215
7.1. Zum Stabilitätsbegriff	215
7.2. Einteilung der Gleichgewichtslagen für einen Spezialfall	217
7.3. Stabilitätssätze	224
7.4. Übungsaufgaben	227
8. Näherungsweise Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung	228
8.1. Das Eulersche Polygonzugverfahren	228
8.2. Das verbesserte Eulersche Polygonzugverfahren	231
8.3. Das modifizierte Eulersche Verfahren	232
8.4. Das Runge-Kutta-Verfahren	234
8.5. Das Differenzenverfahren	240
8.6. Übungsaufgaben	242

II. Partielle Differentialgleichungen

9. Grundbegriffe	243
9.1. Einteilung der partiellen Differentialgleichungen	243
9.2. Beispiele partieller Differentialgleichungen, die sich wie gewöhnliche Differentialgleichungen lösen lassen	247
9.3. Übungsaufgaben	248
10. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung	249
10.1. Die homogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung	249
10.2. Das Cauchysche Anfangswertproblem für die homogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung	255
10.3. Die quasilineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung	256
10.4. Das Cauchysche Anfangswertproblem für die quasilineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung	260
10.5. Übungsaufgaben	262
11. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung	263
11.1. Zur Einteilung der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung	263
11.2. Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	264
11.3. Charakteristiken	270
11.3.1. Allgemeine Bemerkungen	270
11.3.2. Der hyperbolische Fall ($D(x, y) > 0$)	272
11.3.3. Der parabolische Fall ($D(x, y) = 0$)	273
11.3.4. Der elliptische Fall ($D(x, y) < 0$)	274
11.3.5. Zusammenfassung	276
11.4. Die Separationsmethode	277
11.5. Weitere Lösungsmethoden	279
11.6. Übungsaufgaben	280
12. Einige Grundaufgaben der mathematischen Physik	281
12.1. Vorbemerkung	281
12.2. Die Differentialgleichung der schwingenden Saite	282
12.2.1. Zur Herleitung der Saitengleichung	282
12.2.2. Die unendlich lange Saite	284
12.2.3. Die an beiden Enden eingespannte Saite (Methode von D'ALEMBERT) ..	286
12.2.4. Die an beiden Enden eingespannte Saite (Methode von FOURIER)	288
12.3. Die ebene Welle	291
12.4. Die Kugelwelle	292
12.5. Die Differentialgleichung einer homogenen Doppelleitung (Telegraphengleichung) ..	293
12.6. Die Differentialgleichung der Wärmeleitung	296
12.6.1. Herleitung der Wärmeleitungsgleichung	296
12.6.2. Die Temperaturlausbreitung in einem unendlich langen Stab	297
12.6.3. Die Temperaturverteilung in einem Stab endlicher Länge	301
12.6.4. Die Ausbreitung der Temperatur in einem homogenen isotropen Körper ..	303
12.7. Zur Potentialtheorie	306
12.7.1. Die Potentialgleichung	306

12.7.2. Lösung der Laplace-Gleichung mittels Separation	308
12.7.3. Das Dirichletsche Problem für den Kreis	309
12.7.4. Potential und Kapazität eines Plattenkondensators	310
12.7.5. Potential und Kapazität eines Kugelkondensators	311
12.7.6. Potential und Kapazität eines Zylinderkondensators	313
12.7.7. Das Potential innerhalb und außerhalb zweier geladener Halbzylinder	314
12.8. Übungsaufgaben	316

III. Funktionentheorie

13. Komplexe Zahlen	319
13.1. Darstellungen komplexer Zahlen	319
13.2. Die Riemannsche Zahlenkugel	320
13.3. Ebene Punktmengen in der Vollebene	322
13.4. Komplexe Punktfolgen	324
13.5. Reihen mit konstanten Gliedern	327
13.6. Übungsaufgaben	328
14. Funktionen einer komplexen Veränderlichen	328
14.1. Funktionsbegriff	328
14.2. Stetigkeit von Funktionen	330
14.3. Funktionenreihen und Potenzreihen	335
14.4. Elementare Funktionen	339
14.5. Übungsaufgaben	341
15. Analytische Funktionen	342
15.1. Komplexe Differenzierbarkeit	342
15.2. Analytische Funktionen	347
15.3. Konforme Abbildungen	349
15.4. Konforme Abbildung mittels elementarer Funktionen	352
15.4.1. Potenzfunktion	352
15.4.2. Exponentialfunktion	355
15.4.3. Sinusfunktion	356
15.5. Lineare Transformationen	357
15.5.1. Konforme Abbildung durch lineare Transformationen	357
15.5.2. Ganze lineare Transformationen	359
15.5.3. Die Funktion $w = \frac{1}{z}$	360
15.5.4. Die allgemeine lineare Transformation	361
15.5.5. Fixpunkte und Normalformen	362
15.6. Einige Anwendungen auf zweidimensionale Probleme der Feldtheorie	364
15.7. Übungsaufgaben	369
16. Integration im Komplexen	370
16.1. Komplexe Kurvenintegrale	370
16.2. Der Cauchysche Integralsatz und die Cauchysche Integralformel	375
16.3. Unbestimmte Integrale	383

16.4. Konjugierte harmonische Funktionen	384
16.5. Das Maximumprinzip für analytische Funktionen	385
16.6. Übungsaufgaben	386
17. Reihen analytischer Funktionen	389
17.1. Die Sätze von Weierstraß	389
17.2. Taylor-Reihen	390
17.3. Laurent-Reihen	394
17.4. Singuläre Stellen analytischer Funktionen	396
17.5. Übungsaufgaben	400
18. Residuen	401
18.1. Elemente der Residuentheorie	401
18.2. Anwendung der Residuentheorie zur Berechnung von bestimmten Integralen	408
18.2.1. Integrale der Form $I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$	408
18.2.2. Integrale der Form $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	409
18.2.3. Integrale der Form $I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx$	411
18.3. Übungsaufgaben	413
19. Die Laplace-Transformation	414
19.1. Der Begriff der Laplace-Transformation	414
19.2. Die Abbildung von Operationen mittels Laplace-Transformation	421
19.3. Anwendung der Laplace-Transformation zur Lösung linearer Differentialgleichungen	429
19.3.1. Differentialgleichungen erster Ordnung	429
19.3.2. Differentialgleichungen zweiter Ordnung	432
19.3.3. Differentialgleichungen n -ter Ordnung	434
19.3.4. Lösung von Randwertproblemen	438
19.3.5. Systeme von Differentialgleichungen	439
19.4. Übungsaufgaben	442

IV. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik

20. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung	444
20.1. Einführende Bemerkungen	444
20.2. Axiomatische Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes	446
20.3. Das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	449
20.4. Unabhängigkeit von Ereignissen und bedingte Wahrscheinlichkeit	452
20.5. Relative Häufigkeit eines Ereignisses	456
20.6. Beispiele für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten durch kombinatorische Überlegungen	457
20.7. Übungsaufgaben	459

21. Zufallsgrößen und deren Verteilungen	461
21.1. Eindimensionale Zufallsgrößen und deren Verteilungen	461
21.2. Funktionen von Zufallsgrößen	471
21.3. Zufallsvektoren und deren Verteilungen	473
21.3.1. Verteilungsfunktionen	473
21.3.2. Randverteilungen	477
21.3.3. Bedingte Verteilungen	479
21.3.4. Unabhängige Zufallsvektoren	481
21.4. Übungsaufgaben	482
22. Kennwerte von Verteilungen	484
22.1. Erwartungswert einer Zufallsgröße	484
22.2. Varianz einer Zufallsgröße	488
22.3. Momente einer Zufallsgröße	491
22.4. Kennwerte von Zufallsvektoren	492
22.5. Bedingte Erwartungswerte	497
22.6. Übungsaufgaben	498
23. Spezielle Verteilungen	500
23.1. Stetige Verteilungen	500
23.1.1. Die stetige Gleichverteilung	500
23.1.2. Die Normalverteilung (Gaußverteilung)	501
23.1.3. Die Exponentialverteilung	505
23.1.4. Grundverteilungen der mathematischen Statistik	507
23.2. Diskrete Verteilungen	514
23.2.1. Die diskrete Gleichverteilung	514
23.2.2. Die Binomialverteilung	515
23.2.3. Die hypergeometrische Verteilung	518
23.2.4. Die Poissonverteilung	519
23.3. Übungsaufgaben	522
24. Charakteristische Funktionen und Grenzwertsätze	523
24.1. Charakteristische Funktionen und ihre Eigenschaften	523
24.2. Erzeugende Funktionen	528
24.3. Charakteristische Funktionen von mehrdimensionalen Verteilungen	529
24.4. Konvergenzbegriffe in der Wahrscheinlichkeitstheorie	534
24.5. Gesetz der großen Zahlen	536
24.6. Grenzwertsätze	542
24.7. Übungsaufgaben	546
25. Einführung in die Statistik	548
25.1. Grundbegriffe der beschreibenden Statistik	548
25.1.1. Urliste und Verteilungstabellen	548
25.1.2. Statistische Maßzahlen bei einem Merkmal	551
25.1.3. Statistische Maßzahlen bei zwei Merkmalen	552
25.2. Grundgesamtheit und Stichprobe. Hauptsatz der der mathematischen Statistik	554
25.3. Stichprobenfunktionen	557

25.4. Statistische Schätzverfahren	560
25.4.1. Problemstellung der Schätztheorie	560
25.4.2. Eigenschaften von Punktschätzungen	561
25.4.3. Konstruktion von Punktschätzungen	565
25.4.4. Konfidenzschätzungen	568
25.4.4.1. Begriff der Konfidenzschätzung	568
25.4.4.2. Konfidenzschätzung für den Erwartungswert einer $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Grundgesamtheit	569
25.4.4.3. Konfidenzschätzung für die Varianz einer $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Grundgesamtheit	572
25.4.4.4. Konfidenzschätzung für den Parameter p einer Grundgesamt- heit mit Null-Eins-Verteilung	574
25.5. Statistische Prüfverfahren	575
25.5.1. Problemstellung der Testtheorie	575
25.5.2. Prüfung des Erwartungswertes einer normalverteilten Grundgesamtheit	577
25.5.3. Prüfung der Varianz einer normalverteilten Grundgesamtheit	580
25.5.4. Prüfung des Parameters p einer Null-Eins-verteilten Grundgesamtheit	581
25.5.5. Prüfung einer Grundgesamtheit auf Normalverteilung	582
25.5.6. Anpassungstest	583
25.6. Übungsaufgaben	586
Anhang: Tafeln der mathematischen Statistik	589
Lösungen	597
Literatur	621
Namenverzeichnis	623
Sachverzeichnis	624