Inhalt

Einleitung 11

Erster Teil: MENGEN UND ZAHLEN

I. Mathematische Grundbegriffe 21
§ 1. Mengen 21
§ 2. Abbildungen 24
§ 3. Gruppen 26

II. Kardinalzahlen 31
§ 1. Definition und Rechenregeln 31
§ 2. Natürliche Kardinalzahlen 33
§ 3. Endliche und unendliche Mengen 35
§ 4. Die Ordnung der natürlichen Kardinalzahlen 37
§ 5. Die Definition durch Induktion 38
§ 6. Abzählbare Mengen 41
§ 7. Nichtabzählbare Mengen 44
§ 8. Schlußbemerkung zur Definition der Kardinalzahlen 45

III. Ordnung 47
§ 1. Definitionen 47
§ 2. Dedekindsche Zerlegungen 48
§ 3. Geordnete Mengen ohne Lücken und Schnitte 49
§ 4. Schließung von Lücken 54
§ 5. Das Theorem von ZORN 56

IV. Der Ring der ganzen Zahlen 61
§ 1. Bemerkungen zu den Rechenregeln 61
§ 2. Negative Zahlen 62
§ 3. Homomorphismen von Zahlensystemen 65
§ 4. Addition 67
§ 5. Homomorphismen additiver Halbgruppen 69
§ 6. Multiplikatoren 70
§ 7. Multiplikation in Zahlensystemen 72

V. Aus der Algebra . . . 74
§ 1. Zyklische Gruppen . . . 74
§ 2. Einige Rechenregeln in Halbgruppen . . . 76
§ 3. Quotientenbildung . . . 78
§ 4. Ganze rationale Funktionen und Polynome . . . 82
§ 5. Die Existenz des Polynomringes . . . 86

VI. Elementare Arithmetik . . . 88
§ 1. Dezimal- und Dualsysteme . . . 88
§ 2. Primzahlen . . . 90
§ 3. Der Restklassenring . . . 95
§ 4. Euklidische Ringe . . . 96
§ 5. Faktorzerlegung in Hauptidealringen . . . 97
§ 6. Direkte Zerlegung des Restklassenringes mod n . . . 100
§ 7. Der Restklassenring nach einer Primzahlpotenz . . . 102
§ 8. Ein Satz von Gauss über die Zerlegung von Polynomen . . . 105

VII. Reelle Zahlen . . . 106
§ 1. Archimedisch geordnete Gruppen . . . 106
§ 2. Die Existenz stetig geordneter Gruppen . . . 109
§ 3. Eigenschaften stetig geordneter Gruppen . . . 110
§ 4. Multiplikation reeller Zahlen . . . 112
§ 5. Potenzen und Logarithmen . . . 114
§ 6. Schlußbemerkungen zur Einführung der reellen Zahlen . . . 115

VIII. Metrische Räume . . . 117
§ 1. Definitionen . . . 117
§ 2. Stetige Abbildungen . . . 121
§ 3. Kompakte metrische Räume . . . 124
§ 4. Der Überdeckungssatz von Borel . . . 126
§ 5. Vollständige metrische Räume . . . 129

IX. Komplexe Zahlen . . . 130
§ 1. Grundbegriffe . . . 130
§ 2. Algebraische Gleichungen im komplexen Zahlkörper . . . 132
§ 3. Drehungen der komplexen Ebene . . . 136
§ 4. Winkelzahlen . . . 138
§ 5. Trigonometrische Funktionen . . . 141

Zweiter Teil: ELEMENTARGEOMETRIE

X. Affine Inzidenzgeometrie . . . 147
§ 1. Affine Ebenen . . . 147
§ 2. Affine Räume . . . 148
§ 3. Dehnungen und Translationen . . . 151
§ 4. Die Existenz der Dehnungen . . . 153
§ 5. Dreidimensionale Inzidenzräume . . . 155

XI. Koordinaten . . . 157
§ 1. Ortsvektoren in Translationsebenen . . . 157
§ 2. Multiplikation im Koordinatenbereich . . . 158
§ 3. Der Satz von DESARGUES . . . 160
§ 4. Der Satz von PAPPOS . . . 163
§ 5. Multiplikatoren der Vektorengruppe . . . 164
§ 6. Koordinatenkörper und Multiplikatorenkörper . . . 166

XII. Anordnung . . . 168
§ 1. Hilbertsche Anordnungsaxiome und einfachste Folgerungen . . . 168
§ 2. Seiteneinteilung . . . 170
§ 3. Die Geraden als geordnete Punktmengen . . . 171
§ 4. Einführung einer topologischen Struktur . . . 173
§ 5. Orientierung in der Ebene . . . 174
§ 6. Orientierung im Raum . . . 178
§ 7. Parallelprojektion einer Geraden auf eine andere . . . 182
§ 8. Die reelle affine Ebene . . . 184

XIII. Kongruenz . . . 186
§ 1. Kongruenzaxiome . . . 186
§ 2. Die ersten beiden Kongruenzsätze von EUKLID . . . 188
§ 3. Ebene Bewegungen . . . 191
§ 4. Spiegelungen . . . 194
§ 5. Orientierte Winkel . . . 198
§ 6. Anwendung des Symmetrieaxioms . . . 200
§ 7. Die Größenvergleichung der Strecken und Winkel . . . 201

XIV. Einführung in die Spiegelungsgeometrie . . . 204
§ 1. Einige Grundeigenschaften der Bewegungen . . . 204
§ 2. Folgerungen aus (1.1′) und (1.3) . . . 205
§ 3. Folgerungen aus allen Axiomen . . . 208
§ 4. Das Rechnen mit Spiegelungen . . . 210
§ 5. Einige Sätze der Elementargeometrie . . . 216
§ 6. Hjelmslevsche Halbdrehungen . . . 218
§ 7. Geradenbüschel . . . 221

XV. Ebene euklidische Geometrie . . . 224
§ 1. Elementare Sätze . . . 224
§ 2. Koordinaten in der euklidischen Ebene . . . 229
§ 3. Der Satz des PYTHAGORAS . . . 231
§ 4. Die euklidische Ebene als komplexe Zahlenebene . . . 233
§ 5. Die reelle euklidische Ebene . . . 236
§ 6. Aus der Raumgeometrie . . . 237
§ 7. Euklidische Spiegelungsgeometrie der Ebene . . . 240
§ 8. Schlußbemerkung zum Aufbau der euklidischen Geometrie . . . 247

XVI. Projektive Geometrie . . . 250
§ 1. Projektive Ebenen . . . 250
§ 2. Perspektivitäten . . . 251
§ 3. Uneigentliche Punkte und Geraden affiner Räume . . . 253
§ 4. Projektive Räume . . . 255
§ 5. Affine Teilräume . . . 257
§ 6. Hüllenoperatoren in beliebigen Mengen . . . 260

Dritter Teil: ALGEBRA UND KOORDINATENGEOMETRIE

XVII. Nichtkommutative lineare Algebra . . . 264
§ 1. Vektorräume . . . 264
§ 2. Lineare Abhängigkeit . . . 266
§ 3. Die Dimension eines Unterraumes . . . 269
§ 4. Lineare Abbildungen . . . 272
§ 5. Matrizen . . . 274
§ 6. Lineare Gleichungssysteme . . . 276
§ 7. Kanonische Form einer Matrix . . . 277

XVIII. Determinanten . . . 281
§ 1. Definition der Determinantenfunktionen . . . 281
§ 2. Ein Eindeutigkeitssatz . . . 283
§ 3. Multiplikative Determinantenfunktionen . . . 285
§ 4. Die reduzierte Determinantenfunktion . . . 287
§ 5. Determinanten im klassischen Sinn . . . 289
§ 6. Die Cramersche Regel . . . 292
§ 7. Die Determinante einer linearen Abbildung . . . 293

XIX. Körper . . . 295
§ 1. Grundbegriffe . . . 295
§ 2. Endliche Körpererweiterungen . . . 296
§ 3. Endliche Körper . . . 300
§ 4. Einheitswurzeln und Kreisteilungspolynome . . . 301
§ 5. Die Kommutativität endlicher Körper . . . 302
§ 6. Endliche Quasikörper . . . 303
§ 7. Körpererweiterungen gegebenen Grades . . . 305

XX. Affine Koordinatengeometrie . . . 307
§ 1. Der affine Koordinatenraum . . . 307
§ 2. Affine Teilräume . . . 308
§ 3. Linearformen . . . 309
§ 4. Isomorphismen affiner Räume . . . 311

XXI. Innere Produkte . . . 314
§ 1. Definition und einfachste Eigenschaften . . . 314
§ 2. Bewegungen . . . 317
§ 3. Die Hauptachsendarstellung einer quadratischen Form . . . 321

XXII. Konvexe Körper und Polyeder . . . 324
§ 1. Definition der konvexen Körper . . . 324
§ 2. Baryzentrische Koordinaten . . . 325
§ 3. Stützebenen und extreme Punkte . . . 326
§ 4. Konvexe Polyeder . . . 328
§ 5. Polyeder und Zerlegungskomplexe . . . 332
§ 6. Die Eulersche Charakteristik . . . 333

XXIII. Inhalt . . . 340
§ 1. Der Jordansche Inhalt . . . 340
§ 2. Vereinigung und Durchschnitt quadrierbarer Mengen . . . 342
§ 3. Der Inhalt eines Polyeders . . . 344

§ 4. Die Abhängigkeit des Inhalts von der Wahl der Basis 345
§ 5. Schlußbemerkungen zur Inhaltslehre 348

XXIV. Projektive Koordinatengeometrie 350
§ 1. Homogene Koordinaten 350
§ 2. Dimension und Codimension 352
§ 3. Dualität 354
§ 4. Kollineationen 356
§ 5. Polaritäten 359

XXV. Normalformen linearer Abbildungen 363
§ 1. Das Minimalpolynom 363
§ 2. Zerlegung in invariante Unterräume 365
§ 3. Die Normalformen 367

XXVI. Orthogonalität und Kongruenz 371
§ 1. Orthogonalität 371
§ 2. Halbähnlichkeiten 373
§ 3. Normalformen innerer Produkte 375
§ 4. Das Theorem von Witt 379

Anhang. Wieviel Mengenlehre ist in der Gebrauchsmathematik nötig? 382
§ 1. Vorbemerkungen 382
§ 2. Einige „Axiome“ der naiven Mengenlehre 383
§ 3. Konstruktion von Großklassen 388
§ 4. Fundierte Mengen und Stufeneinteilung 391
§ 5. Beispiele 392

Literaturverzeichnis 395

Namenverzeichnis 403

Sachverzeichnis 406