

# Inhaltsverzeichnis

## **Begriffe aus der Mengenlehre**

1. Mengen 15
- 1.1. Endliche und unendliche Mengen 15
- 1.2. Mengen und Teilmengen 15
- 1.3. Operationen mit Mengen 17

## **Begriffe und Sätze aus der Geometrie**

2. Grundbegriffe der Geometrie 23
- 2.1. Grundfiguren 23
- 2.2. Grundrelationen 23
3. Definitionen von Objekten 27
- 3.1. Definitionsarten 27
- 3.2. Aufbau und Formulierung der Definitionen von Objekten 28
- 3.3. Parallelogrammarten 31
4. Definitionen von Relationen 36
- 4.1. Aufbau und Formulierung der Definitionen von Relationen 36
- 4.2. Relationen zwischen einem Kreis und einer Geraden bzw. einer Strecke 38
- 4.3. Relationen zwischen einem Kreis und einem Winkel 40
- 4.4. Relationen zwischen einem Dreieck und einer Geraden bzw. einem Kreis 40
- 4.5. Relationen zwischen gleichartigen Figuren 42
- 4.5.1. Kongruenz 42
- 4.5.2. Ähnlichkeit 44
- 4.5.3. Symmetrie 45
5. Definitionen von Eigenschaften 57
- 5.1. Aufbau und Formulierung der Definitionen von Eigenschaften 57
- 5.2. Winkelarten 58
- 5.3. Dreiecksarten 59
- 5.4. Symmetrieeigenschaften von Figuren 60
- 5.4.1. Axialsymmetrie 60
- 5.4.2. Zentralsymmetrie 63
6. Aussagen 68
- 6.1. Begriff der Aussage 68
- 6.2. Axiome 69
- 6.3. Sätze 70
- 6.3.1. Kongruenzsätze für Dreiecke 71
- 6.3.2. Sätze über rechtwinklige Dreiecke 72
- 6.3.3. Sätze über Winkel 72
7. Definitionen und Sätze für spezielle räumliche Figuren 78

- 7.1. Begriff des Körpers 78
- 7.2. Polyeder 79
- 7.2.1. Prismen 79
- 7.2.2. Pyramiden 80
- 7.2.3. Pyramidenstümpfe 82
- 7.3. Krümmflächige Figuren 82
- 8. Bewegungen und Definitionen der Kongruenz von Figuren 86

### Reelle Zahlen

- 9. Die Menge  $N$  der natürlichen Zahlen 88
- 9.1. Eigenschaften der Menge  $N$  88
- 9.2. Geometrische Darstellung der natürlichen Zahlen 89
- 9.3. Die vier Grundrechenarten in der Menge  $N$  89
- 9.3.1. Addition 89
- 9.3.2. Multiplikation 89
- 9.3.3. Subtraktion 90
- 9.3.4. Division 91
- 9.4. Primzahlen 91
- 9.5. Struktur der Menge  $N$  92
- 10. Die Menge  $G$  der ganzen Zahlen 96
- 10.1. Eigenschaften der Menge  $G$  96
- 10.2. Die vier Grundrechenarten in der Menge  $G$  96
- 10.3. Das Rechnen mit absoluten Beträgen 97
- 10.4. Widersprüche 97
- 11. Die Menge  $K$  der rationalen Zahlen 100
- 11.1. Begriff der rationalen Zahl und Eigenschaften der Menge  $K$  100
- 11.2. Die vier Grundrechenarten in der Menge  $K$  101
- 11.3. Der Beweis einer Existenzaussage 101
- 12. Implikationen 106
- 12.1. Struktur einer Implikation 106
- 12.2. Hinreichende Bedingung und notwendige Bedingung 106
- 12.3. Umkehrung und Kontraposition einer wahren Implikation 107
- 13. Äquivalenzen 110
- 13.1. Struktur einer Äquivalenz 110
- 13.2. Hinreichende Bedingung und notwendige Bedingung 111
- 13.3. Äquivalenzen und Definitionen 111
- 14. Das direkte Beweisverfahren 113
- 14.1. Das Beweisen 113
- 14.2. Das direkte Beweisverfahren 114
- 14.3. Handlungsanweisung für das direkte Beweisverfahren 115
- 15. Beweis einer Äquivalenz 117
- 16. Das Beweisverfahren durch Schluß von  $n$  auf  $n + 1$  119  $\longrightarrow$
- 17. Das Potenzieren 123
- 17.1. Definition der Potenz und Potenzgesetze 123
- 17.2. Potenzen eines Binoms 124

## Inhaltsverzeichnis

- 18. Das Radizieren 126
- 19. Das Logarithmieren 130
- 20. Die Menge  $R$  der reellen Zahlen 134
- 20.1. Begriff der reellen Zahl und Eigenschaften der Menge  $R$  134
- 20.2. Die Rechenarten in  $R$  135
- 21. Das indirekte Beweisverfahren 137

### Funktionen

- 22. Begriff der Funktion 142
- 22.1. Geordnete Paare 142
- 22.2. Abbildungen 142
- 22.3. Eindeutige Abbildungen 143
- 22.4. Graphische Darstellung geordneter Paare 143
- 22.5. Definition des Funktionsbegriffs 144
- 22.6. Arten der Darstellung von Funktionen 145
- 23. Zahlenfolgen 148
- 23.1. Definition und analytische Darstellung einer Zahlenfolge 148
- 23.2. Graphische Darstellung einer Zahlenfolge 149
- 23.3. Arten von Zahlenfolgen 150
- 23.3.1. Monotone Zahlenfolgen 150
- 23.3.2. Konstante Zahlenfolgen 151
- 23.3.3. Konvergente und divergente Zahlenfolgen 151
- 23.4. Berechnung der Grenzwerte von Zahlenfolgen 153
- 23.4.1. Konstante Zahlenfolgen 153
- 23.4.2. Arithmetische Zahlenfolgen 153
- 23.4.3. Geometrische Zahlenfolgen 154
- 23.4.4. Nullfolgen 154
- 23.4.5. Konvergente Zahlenfolgen, deren Grenzwerte mit Hilfe von Grenzwertsätzen berechnet werden können 155
- 23.4.6. Die Zahlenfolge  $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$  157
- 24. Allgemeines über Funktionen 160
- 24.1. Definitions- und Wertebereich von Funktionen 160
- 24.2. Nullstellen von Funktionen 161
- 24.3. Monotonie bei Funktionen 162
- 24.4. Stetigkeit von Funktionen 162
- 24.5. Verhalten von Funktionen im Unendlichen 163
- 24.6. Gerade bzw. ungerade Funktionen 163
- 25. Allgemeines über ganzrationale Funktionen 170
- 26. Lineare Funktionen 171
- 27. Quadratische Funktionen 174
- 28. Nullstellen und Verhalten im Unendlichen von ganzrationalen Funktionen 177
- 29. Gebrochenrationale Funktionen 184
- 30. Potenzfunktionen mit  $y = x^n, n \in G$  194

31. Graphen von Funktionen mit Gleichungen der Form  $y = f(x) + d$  und  $y = f(x - c)$  198
32. Funktionen und ihre inversen Funktionen 203
- 32.1. Begriff der inversen Funktion zu einer gegebenen Funktion 203
- 32.2. Bestimmung von Gleichung und Graph einer inversen Funktion zu einer gegebenen Funktion 205
33. Wurzelfunktionen 209
- 33.1. Wurzelfunktionen als inverse Funktionen zu Potenzfunktionen 209
- 33.2. Wurzelfunktionen mit der Funktionsgleichung  $y = \sqrt[n]{x}$  210
- 33.3. Wurzelfunktionen mit der Funktionsgleichung  $y = \sqrt{ax + b}$ ;  $a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$  211
34. Exponential- und Logarithmusfunktionen 213
- 34.1. Exponentialfunktionen 213
- 34.2. Logarithmusfunktionen 215
35. Winkelfunktionen 221
- 35.1. Definition der Winkelfunktionswerte 222
- 35.2. Definition und Eigenschaften von Winkelfunktionen 222
- 35.2.1. Die Sinusfunktion 222
- 35.2.2. Die Tangensfunktion 224
- 35.3. Beziehungen zwischen den Winkelfunktionswerten 225
- 35.4. Goniometrische Gleichungen 226
- 35.5. Die Sinusfunktion mit der Funktionsgleichung  $y = a \cdot \sin(bx + c)$  229
- 35.6. Sinus- und Kosinussatz 230
- 35.7. Umkehrfunktionen zu den Winkelfunktionen 230

### Differentialrechnung

36. Der Differentialquotient 236
- 36.1. Historisches 236
- 36.2. Differentialquotient und Kurventangente 237
- 36.3. Differentialquotient und Geschwindigkeit 238
- 36.4. Differenzierbarkeit einer Funktion und Differentialquotient einer Funktion 240
37. Ableitungen rationaler Funktionen 243
- 37.1. Ableitung einer Funktion 243
- 37.2. Ableitung ganzrationaler Funktionen 245
- 37.2.1. Ableitung der Potenzfunktion mit der Gleichung  $y = f(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{G}^+$  246
- 37.2.2. Ableitung einer Funktion mit konstantem Faktor 246
- 37.2.3. Ableitung einer Summe 247
- 37.2.4. Ableitung einer konstanten Funktion 248
- 37.3. Ableitung eines Produkts (Produktregel) 248
- 37.4. Ableitung eines Quotienten (Quotientenregel) 250
- 37.5. Ableitung einer Potenzfunktion mit negativ-ganzzahligem Exponenten 252
38. Der Differentialquotient als Quotient von Differentialen 254

## Inhaltsverzeichnis

- 39. Ableitungen nichtrationaler Funktionen 257
- 39.1. Ableitung einer Wurzelfunktion 257
- 39.2. Ableitung von verketteten Funktionen 258
- 39.3. Ableitung der Logarithmusfunktion 260
- 39.4. Ableitung der Exponentialfunktion 262
- 39.5. Ableitungen der Winkelfunktionen 264
- 39.5.1. Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  264
- 39.5.2. Beweis des Satzes über die Ableitungen der Winkelfunktionen 265
- 39.6. Ableitungen der zyklometrischen Funktionen 268
- 39.7. Ableitungen höherer Ordnung 269
- 40. Zwei besondere Verfahren der Differentiation 277
- 40.1. Differentiation einer Funktion, deren Funktionsgleichung in der impliziten Form gegeben ist 277
- 40.2. Differentiation nach Logarithmieren 278
- 41. Anwendungen der Differentialrechnung 279
- 41.1. Monotonie 279
- 41.2. Relative Extrema 280
- 41.2.1. Begriff des relativen Extremums 280
- 41.2.2. Eine notwendige Bedingung für relative Extrema 281
- 41.2.3. Eine hinreichende Bedingung für relative Extrema 283
- 41.3. Wendepunkte 284
- 42. Kurvendiskussion 289
- 43. Extremwertaufgaben 299

### Integralrechnung

- 44. Die unbestimmte Integration 304
- 44.1. Begriff der Stammfunktion einer stetigen Funktion  $f$  304
- 44.2. Geometrische Darstellung der Stammfunktionen einer Funktion  $f$  305
- 44.3. Grundregeln für die Bestimmung von Stammfunktionen 306
- 44.4. Allgemeingültige Regeln für die unbestimmte Integration 307
- 45. Integrationsmethoden 309
- 45.1. Die Methode der partiellen Integration 309
- 45.2. Die Integration durch Substitution 312
- 46. Das bestimmte Integral einer stetigen Funktion 317
- 46.1. Begriff des bestimmten Integrals einer stetigen Funktion 317
- 46.2. Geometrische Bedeutung des bestimmten Integrals 321
- 46.3. Eigenschaften des bestimmten Integrals 322
- 47. Das unbestimmte Integral einer stetigen Funktion 329
- 47.1. Die Integralfunktionen einer stetigen Funktion 329
- 47.2. Begriff des unbestimmten Integrals einer stetigen Funktion 331
- 48. Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral einer stetigen Funktion 335
- 49. Berechnung des Flächeninhalts eines ebenen Flächenstücks 339
- 50. Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers 347

**Lineare Gleichungssysteme**

- 51. Determinanten und lineare Gleichungssysteme 351
- 51.1. Begriff der Determinante 351
- 51.2. Berechnung von Determinanten 351
- 51.2.1. Zweireihige Determinanten 351
- 51.2.2.  $n$ -reihige Determinanten 352
- 51.3. Lösen von linearen Gleichungssystemen 353
- 51.3.1. Lineare Gleichungssysteme aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen 353
- 51.3.2. Lineare Gleichungssysteme aus  $n$  Gleichungen mit  $n$  Variablen 354
- 51.3.3. Homogene Gleichungssysteme 356
- 51.3.4. Lineare Gleichungssysteme aus  $n$  Gleichungen mit  $m$  Variablen 357

**Vektorrechnung**

- 52. Skalare und vektorielle Größen 361
- 53. Vektoren und Vektorräume 363
- 54. Translationen einer Ebene 364
- 55. Linearkombination von Vektoren 369
- 56. Beweise mit Vektoren 372
- 57. Skalarprodukt 373
- 57.1. Verschiebungsarbeit einer Kraft als Skalarprodukt 373
- 57.2. Definition des Skalarprodukts 375
- 57.3. Folgerungen aus dem Skalarprodukt 375
- 57.4. Eigenschaften der skalaren Multiplikation 376
- 58. Vektorprodukt 378
- 58.1. Drehmoment einer Kraft als Vektorprodukt 378
- 58.2. Definition des Vektorprodukts 380
- 58.3. Folgerungen aus dem Vektorprodukt 380
- 58.4. Eigenschaften der vektoriellen Multiplikation 381
- 59. Vektoren in Koordinatendarstellung 384
- 60. Rechnen mit Vektoren in Koordinatendarstellung 388
- 60.1. Gleichheit von Vektoren 388
- 60.2. Addition und Subtraktion von Vektoren 388
- 60.3. Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen 389
- 60.4. Skalare Multiplikation von Vektoren 389
- 60.4.1. Skalare Multiplikation der Einheitsvektoren  $i, j, k$  389
- 60.4.2. Skalare Multiplikation von zwei beliebigen Vektoren 390
- 60.5. Vektorielle Multiplikation von Vektoren 390
- 60.5.1. Vektorielle Multiplikation der Einheitsvektoren  $i, j, k$  390
- 60.5.2. Vektorielle Multiplikation von zwei beliebigen Vektoren 391
- 61. Betrag und Richtung eines Vektors in Koordinatendarstellung 393
- 61.1. Betrag eines Vektors 393
- 61.2. Einheitsvektoren 395
- 61.3. Richtung eines Vektors 395
- 61.3.1. Richtung eines Vektors in der Ebene 395
- 61.3.2. Richtung eines Vektors im Raum 396

## Analytische Geometrie

- 62. Aufgaben der analytischen Geometrie 400
- 63. Analytische Geometrie der Geraden in der Ebene 403
  - 63.1. Geradengleichungen 403
    - 63.1.1. Punktrichtungsgleichung einer Geraden 403
    - 63.1.2. Zweipunktegleichung einer Geraden 403
  - 63.2. Schnittpunkt von zwei Geraden 404
  - 63.3. Schnittwinkel von zwei Geraden 404
- 64. Geradengleichungen mit Parameter 407
  - 64.1. Punktrichtungsgleichung einer Geraden 407
  - 64.2. Zweipunktegleichung einer Geraden 409
  - 64.3. Parametergleichung und parameterfreie Gleichung einer Geraden 411
  - 64.4. Projektionen von Geraden des Raumes auf die Koordinatenebenen 412
  - 64.5. Spurpunkte einer Geraden 413
- 65. Gleichungen von Ebenen im Raum 416
  - 65.1. Parametergleichungen einer Ebene 416
  - 65.2. Parameterfreie Gleichungen einer Ebene 419
- 66. Kegelschnitte 422
- 67. Der Kreis 425
  - 67.1. Definition 425
  - 67.2. Gleichung eines Kreises in Mittelpunktslage 425
  - 67.3. Gleichung eines Kreises in allgemeiner Lage 426
  - 67.4. Kreis und Gerade 426
- 68. Die Parabel 429
  - 68.1. Definition 429
  - 68.2. Gleichung einer Parabel in achsenparalleler Scheitellage 430
  - 68.3. Gleichung einer Parabel in achsenparalleler Lage 432
- 69. Die Ellipse 437
  - 69.1. Definition 437
  - 69.2. Gleichung einer Ellipse in achsenparalleler Mittelpunktslage 440
  - 69.3. Gleichung einer Ellipse in achsenparalleler Lage 440
- 70. Die Hyperbel 442
  - 70.1. Definition 442
  - 70.2. Gleichung einer Hyperbel 443
  - 70.3. Asymptoten einer Hyperbel 445
- 71. Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte in achsenparalleler Lage 448