

# Inhaltsverzeichnis.

## Einleitung.

Seite

Ausschaltung des Unendlichkleinen aus der Analysis. — Das Unendlichgroße in der Mengenlehre Georg Cantors. — Die Aufnahme der Cantorschen Thesen. — Die Antinomien der Mengenlehre und die Versuche ihrer Ausschaltung. — Axiomatische Methode, Formalismus, Intuitionismus, Logizismus. — Der „überschwängliche“ Gebrauch der Symbolik. — Sonderung der mathematischen Operationen von der Interpretation dieser Operationen. — Erkenntnistheorie und Methodologie . . . . .

1—5

## I. Grundtatsachen der Erkenntnis.

„Natürliche Einstellung“ und Reflexion. — Subjektive und objektive Momente der Erkenntnis. — Die Intentionalität. — „Prinzip der Transzendenz des Erkennens“ und „phänomenologisches Zugangsprinzip“. — So-Sein und Da-Sein. — Der Sinn der Abstraktion. — Empirische und nichtempirische Allgemeinheit. — Erkenntnis a priori und Erkenntnis a posteriori. — Unselbständigkeit und Fundierungszusammenhang. — Die grundlegenden Definitionen Husserls. — Die Verwechslung von gedanklicher Isolierbarkeit und ontologischer Selbständigkeit. — Metaphysische Folgerungen aus dieser Verwechslung. — Die verschiedenen Allgemeinstufen der So-Seinserkenntnis. — Oberste Gattung und eidetische Singularität. — Sachhaltige und formale Begriffe. — Logische Über- und Unterordnung. — „Eigenschaften“ von Eigenschaften. — Die Entbehrlichkeit eines erweiterten Funktionenkalküls. — Nichtempirische „Existentialurteile“. — Eine mit der obersten sachhaltigen Gattung verknüpfte Unverträglichkeitsbeziehung. — Die empirische Erkenntnis. — Allgemeine empirische Urteile. — Individuelle und spezifische Allgemeinheit. — Die Logik. — Analyse des Wahrheitsbegriffes. — Das Urteil im logischen Sinne. — Urteilsgegenstand und Urteilsinhalt. — Sinn und Wahrheit von Urteilen. — Urteile über Urteile. — Die Wahrheit ist keine Eigenschaft von Urteilen. — Die nichtprädikativen Urteile. — Die Extensionalitätsthese. — Der Begriff. — Definition und Existenz des Definierten. — Umfang und Inhalt der Begriffe. — Das Problem des Erkenntnisgehaltes der Logik. — Die formalen Begriffe. — Der Sinn von Negation und Konjunktion. — Der Sinn der logistischen Transformationsregeln. — Der logische Zu-

sammenhang ein Bedeutungszusammenhang. — Der Widerspruch. — Schlüsse aus falschen Behauptungen. — Logische Sätze sind Tautologien, die nur formale Begriffe enthalten. — Der Bedeutungsgehalt der formalen Sphäre. — Der Begriff der Identität. — Die Beziehung zwischen Logik und Welt. . . . .

6—40 /

## II. Symbolik und Axiomatik.

Anzeichen und Zeichen. — Das Wesen der Sprache. — Sprache und Denken. — Der Sinn der Sprachzeichen. — Unsinn und Widersinn. — „Sinnlose Zeichen“ eine *contradictio in adjecto*. — Selbständige und unselbständige Zeichen. — Die Hilbertsche Beweistheorie. — Die impliziten Definitionen. — Die Abbildbarkeit der Geometrie auf die Arithmetik. — Die Isomorphie. — Das Operieren mit Möglichkeitsbegriffen. — Die Zweckmäßigkeit der logistischen Symbolik für formale Untersuchungen. — Die unbehebbareren Mängel jeder „Sprache“. — Die „Richtung“ in der Sprache. — „Eigenschaften“ von Beziehungen. — Beispiele für die logische Klassifikation von Beziehungen. — Die Verquickung der Symbole mit den symbolisierten Gegenständen. — Beispiel: das Dezimalsystem. — Hilberts Methode der Ideale. — Der äquivalente Terminus: mathematische Existenz. — Kurze Darstellung und Prinzipienkritik des Brouwerschen Neo-Intuitionismus. — Die Ausschaltung des Komprehensionsaxioms. — Das Unendliche bei Brouwer. — Die „freien“ Wahlfolgen. — Die nicht durchgängige Geltung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten. — Erkenntnistheoretischer Haupteinwand gegen Brouwers Formulierungen. — Die voraussichtliche Entscheidung im Methodenstreit zwischen Formalismus und Neo-Intuitionismus. — Die Axiomatik. — Die Forderungen an ein Axiomensystem. — Widerspruchsfreiheit. — Unabhängigkeit. — Geringe Zahl der Axiome und der Grundbegriffe. — Vollständigkeit. — Das Zusammenfallen der drei Vollständigkeitsbegriffe (Monomorphie, Nichtgabelbarkeit, Entscheidungsdefintheit). — M. Geigers systematische Wesensaxiomatik . . . . .

41—75

## III. Natürliche Zahl und Menge.

Der Zählprozeß. — Der Ordnungsindex des „letzten“ Elementes. — Ordinalzahl und Kardinalzahl. — Zahl und Menge. — Ein-eindeutige Zuordnung und Ordnung. — Zeit und Zahl. — Die Zahl als logisches Abstrakt des schrankenlos fortsetzbar gedachten Zählprozesses. — Die Definition der natürlichen Zahlen. — Widerspruchslösigkeit und „inhaltliche Richtigkeit“ der Arithmetik. — „Inhaltliche“ und „formale Mathematik“. — Das „Modell“ der Unendlichkeit der Zahlenreihe. — Die Peanosche Axiomatik der Arithmetik. — Der Sinn des Prinzips der vollständigen Induktion. — Die Wurzeln der Schwierigkeiten bei der Analyse dieses Prinzips. — Die Auffassung H. Poincarés. — Der Erkenntniswert des gewonnenen Ergebnisses. — Partielle Übereinstimmung mit der Auffassung B. Russells. — Bestim-

mung der Divergenzen. — Analyse des Terminus „Menge“. — Seine Doppeldeutigkeit. — Die „Eigenschaften“ von Zahlen. — Die Ausschaltung der Termini „Menge“, „Menge von Mengen“ usw. — Die „Menge aller Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen“. — Neuere Auffassung Russells über den Mengenbegriff. — Die Begriffe „Folge“, „Folge von Folgen“ usw. — Die sogenannten Erweiterungen des Zahlbegriffes. — Das Verhältnis von Logik und reiner Mathematik. . . 76—105

#### IV. Negative Zahlen, Brüche und irrationale Zahlen.

Eine kritische Feststellung Russells betreffend die „Erweiterungen des Zahlbegriffes“. — Subtraktion und Einführung der Symbolik der negativen Zahlen. — Der Sinn der negativen Zahlen. — Das Rechnen mit negativen Zahlen. — Die Division und die Einführung der Brüche. — Das Rechnen mit Brüchen. — Die Messung. — Die scheinbare anschauliche Gegebenheit der Brüche. — Anschauung und Denken. — Die „Vagheit“ der Anschauung. — Die geometrische „Anschauung“. — Die „Zusammensetzung“ der Strecke aus Punkten. — Die scheinbare Veranschaulichung des Unendlichen. — Der Charakter der geometrischen Erkenntnis. — Der rationale Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen. — Die beschränkte Folge. — Die inversen Operationen des Potenzierens. — Das Beispiel  $\sqrt{2}$ . — Die Häufungsintervalle beschränkter Folgen von Rationalzahlen. — Rationaler und irrationaler „Grenzwert“. — Analyse des Begriffes „Irrationalzahl“. — Kritik der Definitionen Dedekinds, Russells und Cantors. — Der Terminus „Irrationalzahl“ ein unvollständiges Symbol. — Die Wichtigkeit der gewonnenen Einsicht für die Problematik des Transfiniten. — Irrationalzahlen höherer Stufe. — Der „Grenzwert“ monotoner beschränkter Folgen von Irrationalzahlen. — Der Ursprung der im Russell-Whiteheadschen Aufbau der Mathematik auftauchenden Schwierigkeiten. — Die irrationalen Wurzeln von Gleichungen. — Die Erhaltung des Erkenntnisbestandes der Analysis. — Irrationalzahlen und geometrische „Anschauung“ . . . . . 106—134

#### V. Die Mengenlehre.

Rekapitulation der für die folgenden Untersuchungen wichtigen Ergebnisse. — Endliche und unendliche Mengen. — Der Problembereich der Cantorsche Mengenlehre. — Darstellung des Mächtigkeitskalküls. — Teilmenge und Äquivalenz. — Die transfiniten Kardinalzahlen. — Die Abbildung von unendlichen Mengen auf deren echte Teilmengen. — Die Dedekindsche Definition der unendlichen Menge. — Abzählbare Mengen. — Das Diagonalverfahren. — Kritische Analyse des Dargestellten. — Die über die mathematischen Sachverhalte hinausgehende Interpretation in der Mengenlehre und ihre Folgen. — Der finite Sinn der ein-eindeutigen Zuordnung von abzählbaren Mengen. — Der finite Sinn des Diagonalverfahrens. — „Ungeordnete“ Mengen sind: beliebig wohlgeordnete Mengen. — Das Trügerische der geometrischen „An-

schauung". — Das Scheinverfahren der Bildung der Belegungsmenge unendlicher Mengen (Potenzmengenbildung, Bildung der Menge aller Teilmengen). — Die unzulässige Verwendung des Identitätsbegriffes in den „Principia Mathematica“ bei der Potenzmengenbildung. — Die Stufenfolge transfiniten Kardinalzahlen. — Das „Rechnen“ mit transfiniten Kardinalzahlen. — Darstellung der Cantorsche Wohlordnungstheorie. — Die Definition der „Ordnung“. — Ähnlichkeit und Ordnungstypus. — Definition der „Wohlordnung“. — Die Ordinalzahlen. — Abschnitte wohlgeordneter Mengen. — Cantors These der „Fortsetzung der natürlichen Zahlenreihe über das Endliche hinaus“. — Die Cantorsche Fundamentalreihen und Limeszahlen. — Die beiden „Erzeugungsprinzipien“ für Ordinalzahlen. — Beispiele für das Aufsteigen zu höheren Ordnungszahlen. — Hessenbergs Ordnung der natürlichen Zahlen nach dem Ordnungstypus  $\omega^\omega$ . — Die Epsilonzahlen. — Die beiden Hauptsätze der Theorie der wohlgeordneten Mengen. — Der Wohlordnungssatz. — Die Reihe der Alefs. — Die Zahlenklassen. — Das Kontinuumproblem. — Die „Finitisierung“ der Theorie der wohlgeordneten Mengen (Ordinalzahlen). — Hintereinanderschaltung und Ineinanderschachtelung von Bildungsgesetzen. — Der Progreß in der Reihe der Ordinalzahlen führt nicht über das Abzählbare hinaus. — Der Löwenheim-Skolemsche Satz und seine Konsequenzen. — Kritik der nichtprädikativen Verfahren. — Die „selbsttranszendierenden Konstruktionen“. — Die „direkte“ Einführung höherer Mächtigkeiten. — Der Sinn des Wohlordnungssatzes. — Der erkenntnispsychologische Ursprung der kritisierten Lehre. — Die über das mathematische Verfahren hinausgehende Interpretation. — Beispiel: der Satz  $c^a = c$ . — Die Axiomatisierung der Mengenlehre. — Wiedergabe der Fraenkelschen Axiomatik. — Bemerkungen zu einzelnen Axiomen (Axiom der Potenzmenge, Auswahlaxiom, unbedingtes Existenzaxiom). — Die Bedeutsamkeit der unangefochten bleibenden Cantorsche Entdeckungen. — Die finitistische Tendenz in der modernen Grundlagenforschung . . . . . 135—181

## VI. Das Problem der durchgängigen Entscheidbarkeit arithmetischer Fragen.

Unentscheidbarkeit und Unentschiedenheit. — Exemplifizierung der Problemlage am Goldbachschen Satz. — Unentscheidbarkeit bei polymorphen (gabelbaren) Axiomensystemen. — Die Monomorphie (Nichtgabelbarkeit) der Arithmetik. — Die Thesen von der Unendlichkeit des Beweisganges und der Endlichkeit des menschlichen Denkens. — Die scheinbar bestehenden vier Möglichkeiten bezüglich der Beweisbarkeit mathematischer Behauptungen. — Kritik dieser Auffassung. — Nichtgabelbarkeit und Entscheidungsdefinitheit. — Der Zusammenhang der Problematik mit derjenigen des un abzählbar Unendlichen (Brouwer). — Die Trennung des Problems der Entscheidungsdefinitheit von dem „Entscheidungsproblem“ . . . . . 182—189

### VII. Die Antinomien.

Die Antinomie der „Menge aller Ordinalzahlen“. — Die Antinomien der „Menge aller Mengen“ und der „Menge aller Kardinalzahlen“. — Die Antinomie der „Menge aller sich nicht enthaltenden Mengen“ (Russell-Paradoxon). — Das „vicious circle principle“. — Die „Übersetzung“ des Russell-Paradoxons ins rein Logische. — Die Antinomie des lügenden Kreters. — Das „hinter“ dieser Antinomie steckende Problem der Reflexivität des Denkens. — Die epistemologischen Antinomien. — Die Antinomie der kleinsten Zahl, die nur mit mindestens tausend Zeichen definiert werden kann. — Die Antinomie von Richard. — Zusammenfassung. . . . . 190—197

---