

# Inhalt.

## Mathematische Existenz.

Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene.  
Von Oskar Becker (Freiburg i. B.)

	Seite
Vorbemerkung . . . . .	1
§ 1. Der gegenwärtige Streit um die Grundlegung der Mathematik . . . . .	5
a) Intuitionismus (Brouwer) . . . . .	6
b) Formalismus (Hilbert) . . . . .	13
§ 2. Formulierung des Problems der mathematischen Existenz . . . . .	21
§ 3. Immanente Kritik der Hilbertschen Theorie . . .	32
a) Der Sinn der Forderung der Widerspruchsfreiheit . . . . .	32
b) Das Transfinite und das Imaginäre . . . . .	36
c) Die Unvermeidlichkeit des Unendlichen in der Metamathematik	45
§ 4. Logische Analyse der intuitionistischen Thesen .	54
a) Die Leugnung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten . . . . .	54
b) Konsequenz und Wahrheit . . . . .	69
§ 5. Ontologische Probleme des Intuitionismus . . .	81
a) Der transfinite Progressus und seine ontologische Deutung . . .	82
I. Die Reihe der Cantorsche Transfiniten in der traditionellen Interpretation . . . . .	82
II. Transfinite Strukturkomplifikationen des Bewußtseins . . . . .	96
A. Die Stufen der Relativierung von Ausfagen . . . . .	96
B. Die Stufen der Bildgegebenheit . . . . .	98
C. Die Stufen der Reflexion auf sich selbst . . . . .	101
Anmerkung (über Schelling) . . . . .	114
III. Die mathematischen Theorien über die Menge $W$ . . . . .	116
IV. Die transfinite Komplifikation des Bewußtseins und die Mengenlehre . . . . .	119
A. Die transfinite Progression und der überlieferte Mengen- begriff . . . . .	119
B. Phänomenologische und mathematische Theorie des Trans- finiten . . . . .	126

	Seite
b) Untersuchungen zum Kontinuumproblem . . . . .	129
I. Die geschichtlichen Wurzeln in der Antike . . . . .	130
A. Die antike Definition der mathematischen Existenz durch Konstruktion . . . . .	130
B. Die antike Lehre von den irrationalen Verhältnissen . . . . .	133
C. Das Kontinuum in der Antike . . . . .	143
II. Die weitere Entwicklung in der neueren Mathematik bis auf Hilbert . . . . .	148
A. Die abendländische Definition durch konvergente unend- liche Prozesse . . . . .	148
B. Die Entwicklung des allgemeinen Funktionsbegriffs bis 1750 . . . . .	149
C. Die Idee der »ganz willkürlichen« Funktion . . . . .	153
D. Das moderne Kontinuumproblem . . . . .	160
III. Hilberts Lösungsversuch des Kontinuumproblems . . . . .	170
A. Die angebliche Rolle der Beweistheorie bei der Hilbert- schen Lösung . . . . .	170
B. Hilberts Hauptbetrachtung . . . . .	171
C. Das Lemma II . . . . .	173
D. Das Lemma I . . . . .	176
E. Die sachliche Bedeutsamkeit der Hilbertschen Lösung . . . . .	180
§ 6. Das philosophische Problem der mathematischen Existenz . . . . .	181
a) Hermeneutische Analyse der demonstrativen und der deduk- tiven Mathematik . . . . .	181
b) Die entscheidende Rolle der Zeitlichkeit für den Seinscharakter der mathematischen Gegenstände . . . . .	197
I. Die grundlegenden antiken Theorien . . . . .	197
A. Geometrische Figuren . . . . .	197
B. Zahlen. (Die Entwicklung von der Gestalt zur Reihe) . . . . .	199
C. Das Unendliche . . . . .	201
D. Zahl, Unendlichkeit und Zeit . . . . .	209
II. Kant über Zeit, Zahl, Unendlichkeit . . . . .	213
III. Systematische Untersuchungen . . . . .	217
A. Die verschiedenen Arten der unendlichen Progression . . . . .	217
B. Die historische und die naturhafte Zeit . . . . .	220
C. Mathematik und Zeitlichkeit . . . . .	228
c) Der ontologische Sinn mathematischer Existenz . . . . .	234
I. Einführung in die Problemstellung . . . . .	234
II. Historische Orientierung an der Antike . . . . .	236
A. Das Problem der <i>μάθησις</i> (Vorplatoniker [Archytas] und Plato) . . . . .	236
B. Das Apriori und die <i>ἀνάμνησις</i> . (Der junge Plato) . . . . .	239
C. Die Abstraktion ( <i>ἀφαίρεσις</i> ) als das Kennzeichen des Mathematischen (Aristoteles) . . . . .	243

	Seite
D. Axiomatischer Elementaraufbau ( <i>στοιχειώσεως</i> ). (Der spätere Plato) . . . . .	246
E. Der platonisch-aristotelische Gegensatz . . . . .	254
F. Die Anfänge des Mathematisch-Formalen . . . . .	255
III. Die Weiterentwicklung des Mathematisch-Formalen im Abendland . . . . .	264
A. Begrenzung der Darstellung . . . . .	264
B. Descartes und seine Zeit . . . . .	265
C. Leibniz . . . . .	274
D. Kant . . . . .	288
IV. Systematische Erörterung der Frage nach dem Seinsfinn des Mathematischen. (Abschließende Bemerkungen über die gegenwärtige Problemlage) . . . . .	307
<b>Mathematischer Anhang</b> . . . . .	329
<b>Vorbemerkung</b> . . . . .	329
<b>Ergänzungen zu § 3. (Das Unendliche in der Metamathematik)</b> . . . . .	330
I. Der metamathematische Anfaß von J. v. Neumann . . . . .	330
II. Die (halb-)transfinite Induktion in W. Ackermanns Beweistheorie . . . . .	330
III. Zum Problem des »genügend kleinen« Endlichen in der Metamathematik . . . . .	332
<b>Ergänzungen zu § 4. (Fragen der Brouwerschen Logik)</b> . . . . .	335
I. Zum Problem des »Quantum non datur« . . . . .	335
II. Die Iteration der Abfurdität . . . . .	339
<b>Ergänzungen zu § 5. (Zur Lehre von den transfiniten Ordnungszahlen und zum Kontinuumproblem)</b> . . . . .	340
I. J. v. Neumanns allgemeine Theorie der transfiniten Ordnungszahlen . . . . .	341
II. Hilberts Theorie der Variablentypen und Ordnungszahlen . . . . .	343
III. Heffernbergs induktive Begründung der Rechnung mit Ordnungszahlen . . . . .	349
IV. Brouwers Theorie der zweiten Zahlklasse . . . . .	350
V. Beispiel für die transfinite Iteration der Bildintentionalität . . . . .	352
VI. Über gewisse Schwierigkeiten in der Transfinitentheorie und die Möglichkeiten zu ihrer Überwindung . . . . .	354
A. Die Löwenstein-Skolem'sche Paradoxie . . . . .	354
B. Über ein Verfahren zur systematischen Bezeichnung (Konstruktion) aller Transfiniten der zweiten Zahlklasse . . . . .	356
C. Zur Frage der Begründung des zweiten Hilbert'schen Lemmas zum Kontinuumfaß und dieses Satzes selbst . . . . .	365
<b>Schlußbemerkung</b> . . . . .	368