

Einleitung	11
Teil I. Allgemeine philosophische Probleme der Mathematik	13
1. Mathematik und materielle Wirklichkeit	13
1.1. Das Problem der Beziehung der Mathematik zur materiellen Wirklichkeit als philosophisches Grundproblem der Mathematik	13
1.2. Die Entstehung der Grundbegriffe der Mathematik	18
1.3. Die hauptsächlichsten Stimuli der Entwicklung der Mathematik	24
1.4. Einfluß gesellschaftlicher Bedingungen auf die Entwicklung der Mathematik	39
1.5. Der Gegenstand der Mathematik	56
1.6. Die Bedeutung der Mathematik für die Entwicklung anderer Wissenschaften, der Technik und des menschlichen Lebens	80
1.7. Die Praxis als Wahrheitskriterium in der Mathematik. Die Exaktheit der Mathematik	90
2. Der Aufbau mathematischer Theorien	97
2.1. Ziel und Mittel der Begründung der Mathematik. Mathematische Strenge	97
2.2. Algorithmen	112
2.3. Der Prozeß der Herausbildung von Grundbegriffen und Grundannahmen mathematischer Theorien durch Abstraktion	116
2.4. Die Entwicklung von Verfahren zur Begründung der Mathematik und des Begriffs der mathematischen Strenge	121
2.5. Inhalt und Bedeutung der mathematischen Symbolik	129
2.6. Innere Gesetzmäßigkeiten der Entwicklung der Mathematik	139

Teil II. Die drei großen Grundlagenkrisen der Mathematik	151
1. Die Erarbeitung von Verfahren zur Begründung der Mathematik im alten Griechenland von Pythagoras bis Euklid	152
1.1. Die Mathematik der Pythagoreer	153
1.2. Das Problem des Unendlichen in der altgriechischen Philosophie und Mathematik	156
1.3. Die drei berühmten Aufgaben des klassischen Altertums	158
1.4. Die Überwindung der Grundlagenkrise der altgriechischen Mathematik	160
2. Die Ausarbeitung von Verfahren zur Begründung der Mathematik im 18. und in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts	161
2.1. Besonderheiten der Verfahren zur Begründung der Mathematik Ende des 17. und während des 18. Jahrhunderts	161
2.2. Ursachen des Vorherrschens einer metaphysischen Behandlung der Grundlagenprobleme der Mathematik im 18. Jahrhundert	176
2.3. Die Ausarbeitung von Verfahren zur Begründung der Mathematik im letzten Viertel des 18. und in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts	189
3. Die Ausarbeitung von Methoden zur Begründung der Mathematik im letzten Viertel des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts	212
3.2. Die historischen Voraussetzungen für die Entwicklung der Mengenlehre	212
3.2. Grundbegriffe der Cantorsche allgemeinen Mengenlehre. Schwierigkeiten beim Aufbau der Mengenlehre	223
3.3. Die philosophischen Ansichten Georg Cantors. Die philosophisch-mathematische Begründung der Mengenlehre	229
3.4. Die Anfangsetappe der Kritik an der Konzeption G. Cantors.	235
3.5. Paradoxien (Antinomien) der Mengenlehre	242
3.6. Der axiomatische Aufbau der Mengenlehre nach Zermelo	244
3.7. Schwierigkeiten, die mit dem Zermeloschen Auswahlaxiom zusammenhängen	246
3.8. Das Problem der Existenz in der Mathematik	248
3.9. Über den philosophischen Aspekt der Schwierigkeiten einer mengentheoretischen Begründung der Mathematik	251
Teil III Die axiomatische Methode	253
1. Die inhaltliche Axiomatisierung von Theorien	255
1.1. Charakteristik der inhaltlichen Axiomatisierung einer Theorie	255
1.2. Die „Elemente“ des Euklid als Musterbeispiel einer inhaltlichen Axiomatisierung einer Theorie	256
1.3. Platon, Aristoteles und die Methodologie der „Elemente“ des Euklid	259
2. Die semiformale Axiomatisierung von Theorien	260
2.1. Charakteristik der semiformalen Axiomatisierung von Theorien	260
2.2. Grundbegriffe und Axiome	263
2.3. Vereinbarkeit von Axiomen (Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems)	264

2.4. Unabhängigkeit eines Axiomensystems	267
2.5. Gleichwertigkeit von Axiomensystemen	268
2.6. Vollständigkeit von Axiomensystemen	269
2.7. Bedeutung der axiomatischen Methode für die Entwicklung der Mathematik	269
2.8. Die axiomatische Methode in den Anwendungen der Mathematik	274
3. Die Rolle der Praxis in der Entwicklung der Axiomatisierung der euklidischen Geometrie und der Arithmetik der natürlichen Zahlen	279
3.1. Erarbeitung einer inhaltlichen Axiomatik für die Arithmetik der natürlichen Kardinalzahlen	280
3.2. Beantwortung der zweiten Frage von S. A. Janowskaja	282
3.3. Grundvoraussetzungen für die Erarbeitung eines semiformalen Axiomensystems der Arithmetik der natürlichen Zahlen	286
4. Ergänzungen zur Charakteristik der semiformalen axiomatischen Methode	289
4.1. Die Rolle des Induktionsaxioms in der Arithmetik der natürlichen Zahlen	289
4.2. Über die sogenannten Definitionen durch Vereinbarung in der Mathematik.	292
4.3. Grenzen der Wirksamkeit der semiformalen axiomatischen Methode	295
4.4. Die erkenntnistheoretische Bedeutung der semiformalen axiomatischen Methode	296
Anhang	297
1. Über die Widerspruchsfreiheit der Lobatschewskischen Geometrie	297
1.1. Das Axiomensystem der euklidischen Geometrie	297
1.2. Interpretation der Lobatschewskischen Planimetrie	302
1.3. Die Widerspruchsfreiheit der Lobatschewskischen Geometrie	306
1.4. Die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den Hilbertschen Axiomgruppen I, II, III und V	306
2. Das Axiomensystem der euklidischen Geometrie nach H. Weyl	308
Namenregister	312