

# Inhaltsverzeichnis

<b>I Von der geometrischen zur logisch-mengentheoretischen Evidenz</b> . . . . .	11
<b>§ 1. Axiomatisierung der Geometrie im Altertum</b> . . . . .	11
1. Die Mathematik als Lehre vom Raum und von der Zahl bei den Griechen . . . . .	11
2. Die Axiomatisierung der Geometrie durch Euklid . . . . .	13
3. Die Evidenz der empirischen und der logischen Aussagen . . . . .	17
4. Die Problematik der geometrischen Evidenz . . . . .	20
<b>§ 2. Moderne Axiomatik der Geometrie</b> . . . . .	23
1. Abschluss der Axiomatisierung der Geometrie durch Hilbert . . . . .	23
2. Die Uminterpretierung der Axiome . . . . .	27
3. Die Möglichkeit Nicht-Euklidischer Geometrien . . . . .	28
4. Affine und projektive Inzidenzgeometrie . . . . .	31
<b>§ 3. Modelle von Axiomensystemen</b> . . . . .	34
1. Relationsgebilde . . . . .	34
2. Modelle geometrischer Axiomensysteme . . . . .	35
3. Modelle für Nicht-Euklidische Geometrien . . . . .	40
4. Die Forderungen an ein Axiomensystem . . . . .	42
<b>§ 4. Der Strukturbegriff</b> . . . . .	46
1. Erweiterung eines Axiomensystems durch Definitionen . . . . .	46
2. Äquivalente Axiomensysteme für die einfachsten Relationsgebilde . . . . .	47
3. Äquivalente Axiomensysteme für algebraische Gebilde . . . . .	50
4. Mathematik ist die Lehre von den Strukturen . . . . .	54
<b>§ 5. Entwicklung und Präzisierung der Analysis</b> . . . . .	58
1. Die reellen und die komplexen Zahlen . . . . .	58
2. Zurückführung der Euklidischen Geometrie auf die Analysis . . . . .	63
3. Die Analysis im Frühstadium . . . . .	65
4. Präzisierung der Analysis . . . . .	68
<b>§ 6. Zurückführung der reellen Zahlen auf die natürlichen Zahlen</b> . . . . .	71
1. Erweiterung von Strukturen . . . . .	71
2. Konstruktion der rationalen Zahlen aus den natürlichen Zahlen . . . . .	72
3. Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen . . . . .	74
4. Konstruktion der komplexen Zahlen; hyperreelle Zahlen . . . . .	77
<b>II Der Triumph der Mengenlehre</b> . . . . .	79
<b>§ 7. Zurückführung der natürlichen Zahlen auf die Mengenlehre</b> . . . . .	79
1. Das Axiomensystem von Peano; Induktion und Rekursion . . . . .	79
2. Die Gesetze der natürlichen Zahlen . . . . .	83
3. Mengentheoretische Modelle für das Axiomensystem von Peano . . . . .	84
4. Anhang: Ungelöste Probleme der Zahlentheorie . . . . .	86

<b>§ 8. Die Cantorsche naive Mengenlehre</b> . . . . .	89
1. Mathematik ist Mengenlehre . . . . .	89
2. Paradoxe Erscheinungen bei unendlichen Mengen . . . . .	91
3. Abzählbare Mengen . . . . .	93
4. Die Mächtigkeit des Kontinuums . . . . .	95
<b>§ 9. Der Vorstoss ins Transfinite</b> . . . . .	99
1. Transfinite Prozesse . . . . .	99
2. Das Universum der reinen Mengen . . . . .	102
3. Die Ordinalzahlen . . . . .	104
4. Transfinite Arithmetik . . . . .	106
<b>§ 10. Klassische Aussagenlogik</b> . . . . .	108
1. Die Entwicklung der mathematischen Logik . . . . .	108
2. Algebra der Logik . . . . .	109
3. Die Gesetze der Aussagenlogik . . . . .	114
4. Anhang: Schaltalgebra . . . . .	118
<b>§ 11. Prädikatenlogik</b> . . . . .	121
1. Elementare Prädikatenlogik . . . . .	121
2. Klassen- und Relationenlogik . . . . .	128
3. Höhere Prädikatenlogik . . . . .	133
4. Daß Programm des Logizismus . . . . .	134
<b>III Die Problematik der logisch-mengentheoretischen Evidenz und der Weg zum Formalismus</b> . . . . .	137
<b>§ 12. Einwände gegen die naive Mengenlehre</b> . . . . .	137
1. Gibt es aktual unendliche Mengen? . . . . .	137
2. Gilt das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten auch für unendliche Gesamtheiten? . . . . .	140
3. Sind imprädikative Definitionen legitim? . . . . .	142
4. Die Problematik des Auswahlprinzips . . . . .	144
<b>§ 13. Die Antinomien</b> . . . . .	147
1. Paradoxien, Trugschlüsse und Antinomien . . . . .	147
2. Logisch-mengentheoretische Antinomien . . . . .	150
3. Andere Formen der Russellschen Antinomie . . . . .	154
4. Die semantischen Antinomien . . . . .	156
<b>§ 14. Die Antworten auf die Antinomien</b> . . . . .	161
1. Revision des naiven Standpunktes der klassischen Mathematik . . . . .	161
2. Typentheorie . . . . .	163
3. Axiomatische Mengenlehre . . . . .	165
4. Intuitionismus und Operativismus . . . . .	172
<b>§ 15. Formalismus</b> . . . . .	177
1. Das Hilbertsche Programm der Metamathematik . . . . .	177
2. Axiomatisierung und Formalisierung der elementaren Prädikatenlogik . . . . .	179

3. Formale mathematische Theorien . . . . .	184
4. Semantische und syntaktische Begriffe . . . . .	190
<b>§ 16. Algorithmen und Kalküle . . . . .</b>	<b>194</b>
1. Der intuitive Algorithmus- und Kalkülbegriff . . . . .	194
2. Berechenbarkeit . . . . .	198
3. Präzisierungen des Begriffs der Berechenbarkeit . . . . .	201
4. Entscheidungsprobleme formaler Theorien . . . . .	206
<b>§ 17. Die Gödelschen Sätze über die Vollständigkeit und die Widerspruchsfreiheit formaler Systeme . . . . .</b>	<b>209</b>
1. Die logische Vollständigkeit der elementaren Prädikatenlogik . . . . .	209
2. Die Unvollständigkeit der Arithmetik . . . . .	211
3. Weitere Mängel formaler Systeme . . . . .	216
4. Die Möglichkeit Nicht-Cantorscher Mengenlehren . . . . .	220
<b>§ 18. Philosophische Probleme der modernen Grundlagenforschung . . . . .</b>	<b>224</b>
1. Ist die Grundlagenkrise überwunden? . . . . .	224
2. Der Finslersche Platonismus . . . . .	225
3. Das Begründungsproblem der Mathematik und der Logik . . . . .	227
4. Mathematik und Metaphysik . . . . .	229
<b>Weiterführende Literatur . . . . .</b>	<b>233</b>
<b>Sachverzeichnis . . . . .</b>	<b>235</b>