

Inhalt

1 Einführung

A	1.1 Topologische Probleme	11
	1.2 Topologie und euklidische Geometrie	13
	1.3 Topologische Invarianten	15

2 Topologische Grundbegriffe

A	2.1 Entstehung der Topologie	16
	2.1.1 Historischer Weg zur Topologie	16
	2.1.2 Anschaulicher Weg	17
	2.2 Der Jordansche Kurvensatz	18
	2.2.1 Geschlossene einfach zusammenhängende Kurven	18
B	2.2.2 Der Jordansche Kurvensatz	20
	2.2.3 Bijektive Abbildungen	20
	2.2.4 Stetige Abbildungen	21
	2.3 Topologische Räume	23
	2.3.1 Umgebungssysteme	23
	2.3.2 U-Topologie	23
	2.3.3 Besondere Punkte und Mengen	26
	2.3.4 Topologische Abbildungen	30
	2.4 Metrische Räume	32
	2.4.1 Definition und Eigenschaften	32
	2.4.2 Topologische Abbildungen in metrischen Räumen	37
	2.4.3 Zusammenhang mit der „Gummituch-Topologie“	39

3 Ebene Netze und Landkarten

A	3.1 Einführende Beispiele	40
	3.1.1 Das Königsberger Brückenproblem	40
	3.1.2 Das Versorgungsnetz-Problem	41
	3.1.3 Das Erbteilungs-Problem	41
	3.1.4 Färbungsproblem bei Nachbarländern	42
B	3.2 Durchlaufbare Netze	43
	3.2.1 Beispiele und Gegenbeispiele	43
	3.2.2 Netze	44
	3.2.3 Sätze über Netze, Euler-Wege	45
	3.2.4 Hamilton-Wege	49

3.3	Plättbare Netze	50
3.3.1	Definition	50
3.3.2	Der Satz von Euler	51
3.3.3	Das Versorgungsnetz-Problem	52
3.3.4	Das vollständige Netz von fünf Ecken	53
3.3.5	Das Problem der Nachbargebiete	54
3.4	Färbungsprobleme ebener Landkarten	55
3.4.1	Die Vierfarben-Vermutung	55
3.4.2	Der Fünffarbensatz	55
3.5	Bäume	59
3.5.1	Netze ohne geschlossene Wege	59
3.5.2	Einfache Sätze über Bäume	61
C 3.6	Netze und Landkarten in der Schule	62
3.6.1	Netze	62
3.6.2	Durchlaufbare Netze	62
3.6.3	Bäume und Labyrinth	65
3.6.4	Landkarten und Färbungen	66
3.6.5	Parkettierungen	67
4 Netze mit Bewertungen		
A 4.1	Beispiele für bewertete Netze	68
4.1.1	Einführung	68
4.1.2	Problem des minimalen Gerüsts	69
4.1.3	Das Rundreiseproblem	70
B 4.2	Bewertete Netze	72
4.2.1	Definition	72
4.2.2	Problem des kürzesten Wegs zwischen zwei Ecken	74
4.2.3	Kürzeste Wege von einem Punkt aus	75
4.2.4	Minimalgerüste	80
4.3	Metrische und topologische Strukturen in bewerteten Netzen	82
A 4.3.1	Einführung	82
B 4.3.2	Bewertung als Metrik	84
4.3.3	Taximetrik	88
C 4.4	Didaktische Bemerkungen	90
5 Linien im Raum und Knoten		
A 5.1	Verschlingungen und Knoten mit Fäden	93
5.1.1	Beispiele	93
5.1.2	Ein Faden mit zwei festen Enden	95
5.1.3	Mehr als ein Faden	97

B 5.2	Knoten	98
5.2.1	Definition	98
5.2.2	Knotenprojektionen	99
5.2.3	Einfache Knoten	103
5.2.4	Alternierende Normierungen	106
5.3	Kettenbildungen	108
5.3.1	Knoten und einfache Verkettungen	108
5.3.2	Mehrfache Verkettung zweier Kreise	110
5.3.3	Kettenbildungen, Verkettungen und Verbindungen	111
C 5.4	Didaktische Hinweise	112
5.4.1	Vorbemerkung	112
5.4.2	Oben und unten	113
5.4.3	Weitere Probleme	114

6 Topologie im dreidimensionalen Raum

A 6.1	Topologische Probleme im Anschauungsraum	115
6.1.1	Fortsetzung des Erbteilungsproblems	115
6.1.2	Geschlossene Linien auf Kugel und Torus	117
6.1.3	Das Möbiusband	118
B 6.2	Geschlossene und berandete Flächen	119
6.2.1	Definition und topologische Äquivalenz von Flächen	119
6.2.2	Zusammenhang und Geschlecht einer geschlossenen Fläche	123
6.2.3	Ebene Darstellung von Flächen	126
6.2.4	Normalformen für zweiseitige geschlossene Flächen	128
6.2.5	Normalformen für einseitige geschlossene Flächen	129
C 6.3	Kugel, Torus und Möbiusband im Unterricht	131
6.3.1	Vorbemerkungen	131
6.3.2	Geschlossene Linien auf Kugel und Torus	131
6.3.3	Zusammenkleben von Bändern	132

7 Landkarten und Flächen

A 7.1	Netze und Landkarten auf Kugel und Torus	134
7.1.1	Einführung	134
7.1.2	Zusammenhang in einer Landkarte	135
7.1.3	Abzählungen bei Landkarten auf Kugel und Torus	136
B 7.2	Der Satz von Euler	137
7.2.1	Der Satz von Euler für die Kugel	137
7.2.2	Reguläre Polyeder	140
7.2.3	Halbreguläre Polyeder	143
7.2.4	Der Satz von Euler für geschlossene Flächen	145

10	Inhalt	
7.3	Färbungsprobleme auf Flächen	146
7.3.1	Der Fünffarbensatz für die Kugel	146
7.3.2	Der Siebenfarbensatz für den Torus	147
7.3.3	Der Sechsfarbensatz für das Möbiusband	148
7.3.4	Das Färbungsproblem auf geschlossenen Flächen	149
C 7.4	Landkarten auf Flächen im Unterricht	151
8	Lösungen der Aufgaben.	152
	Literatur.	163
	Symbole.	165
	Sachverzeichnis	166