

## Inhaltsverzeichnis

### Vorwort XV

### 1 Einleitung 1

- 1.1 Experimentelle und Theoretische Physik 1
- 1.2 Ziel der Theoretischen Physik 2
- 1.3 Der Aufbau der Lehrbuchreihe Theoretische Physik 2
- 1.4 Stellung der klassischen Mechanik innerhalb der Theoretischen Physik 3
- 1.5 Gültigkeitsgrenzen der klassischen Mechanik 4
- 1.6 Aufbau des Bands Theoretische Mechanik 4
- 1.7 Modellebenen der Theoretischen Mechanik 7
- 1.8 Lösung von Gleichungen 8

### 2 Kinematik eines Massenpunkts 13

- 2.1 Grundbegriffe der Kinematik 13
  - 2.1.1 Bezugssystem und Räume 13
  - 2.1.2 Weglänge, Verrückung, Geschwindigkeit 14
  - 2.1.3 Beschleunigung 16
- 2.2 Verschiedene Koordinatensysteme 17
  - 2.2.1 Zerlegung in kartesische Koordinaten 17
  - 2.2.2 Zerlegung nach Tangential- und Normalkomponenten 18
  - 2.2.3 Zerlegung in ebenen Polarkoordinaten 21
  - 2.2.4 Zerlegung in Kugelkoordinaten 24
  - 2.2.5 \* Zerlegung in allgemeine krummlinige Koordinaten 25
- 2.3 \* Rekonstruktion von Bewegungsgleichungen 29
- Aufgaben 31

\* Mit einem Stern sind Themen und Kapitel gekennzeichnet, die eher zusätzlich für die Masterausbildung vorgesehen sind

<b>3</b>	<b>Newton'sche Mechanik des einzelnen Massenpunkts</b>	<b>33</b>
3.1	Die Newton'schen Axiome	33
3.1.1	Das erste Axiom: Trägheitsgesetz	33
3.1.2	Das zweite Axiom: Grundgleichung der Dynamik	35
3.1.2.1	Kraftgesetz	35
3.1.2.2	Superpositionsprinzip	36
3.1.2.3	Statische Kraftmessung	37
3.1.2.4	Das zweite Newton'sche Axiom	37
3.1.2.5	Träge Masse	38
3.1.2.6	Dynamische Kraftmessung	39
3.1.3	Das dritte Axiom: Wirkung und Gegenwirkung	39
3.2	Bewegung eines freien Massenpunkts	40
3.2.1	Bewegung eines Massenpunkts im Schwerfeld	42
3.2.2	Bewegung einer Ladung im elektromagnetischen Feld	44
3.3	Arbeit und kinetische Energie	45
3.4	Der Satz von der Erhaltung der mechanischen Energie	49
3.4.1	Erste Integrale	49
3.4.2	Konservative Kräfte	50
3.4.3	Kraftfelder	51
3.4.4	Potentielle Energie und Arbeit, notwendige und hinreichende Bedingungen für konservative Kraftfelder	52
3.4.5	Darstellung von konservativen Kraftfeldern	56
3.4.6	Energiesatz der Mechanik	57
3.4.7	Beispiele für konservative Kraftfelder	58
3.4.7.1	Schwerfeld der Erde in der Nähe der Erdoberfläche	58
3.4.7.2	Newton'sches Gravitationsgesetz	60
3.4.8	Beispiele für nichtkonservative Kraftfelder	65
3.4.8.1	Kraftfeld mit $\text{rot } \vec{F} \neq 0$	65
3.4.8.2	Nichtkonservatives Kraftfeld mit $\text{rot } \vec{F} = 0$ bis auf singuläre Linien	67
3.4.9	Nichtkonservative Kräfte mit zeitabhängigem Potential	69
3.5	Zentralkräfte, Drehmoment und Drehimpuls	70
3.5.1	Zentralkräfte	70
3.5.2	Drehmoment und Drehimpuls	74
3.6	Die eingeschränkte Bewegung eines Massenpunkts. Dissipation	75
3.6.1	Zwangsbedingungen	75
3.6.2	Zwangskräfte und Bewegungsgleichung	76
3.6.3	Bewegung eines Massenpunkts auf ruhender schiefer Ebene	79
3.6.3.1	Behandlung in natürlichen Koordinaten	80
3.6.3.2	Behandlung mit Lagrange-Gleichungen	80
3.6.4	Arbeit der Zwangskraft	82
3.6.5	Verallgemeinerung der Bedingungsgleichungen	83

- 3.6.6 Zweiseitige und einseitige Zwangsbedingungen 87
- 3.6.7 Freiheitsgrade 87
- 3.6.8 Dissipation 88
- 3.6.8.1 Gleitreibung 89
- 3.6.8.2 Haftreibung 90
- 3.6.8.3 Stokes'sche und Newton'sche Reibung 91
- 3.6.8.4 Zusammenfassung der Reibungsgesetze 92
- 3.7 Gleichgewicht des Massenpunkts. Das Prinzip der virtuellen Arbeit 93
  - 3.7.1 Gleichgewicht eines Massenpunkts. Das Problem der Statik 93
  - 3.7.2 Das Prinzip der virtuellen Arbeit 95
    - 3.7.2.1 Freier Massenpunkt 95
    - 3.7.2.2 Gebundener Massenpunkt 96
    - 3.7.2.3 Verallgemeinerung des Prinzips der virtuellen Verrückung 100
    - 3.7.2.4 Prinzip der virtuellen Verrückung für konservative eingeprägte Kräfte 101
- 3.8 Das d'Alembert'sche Prinzip. Die formale Rückführung der Dynamik auf die Statik 101
  - 3.8.1 Das d'Alembert'sche Prinzip 101
  - 3.8.2 Die formale Rückführung der Dynamik auf die Statik 103
- 3.9 Bewegte Bezugssysteme (Relativbewegung). Trägheitskräfte 104
  - 3.9.1 Beschreibung der Drehbewegung, Winkelgeschwindigkeit 104
  - 3.9.2 Kinematik der Relativbewegung 105
    - 3.9.2.1 Zusammenhang der Ortsvektoren 105
    - 3.9.2.2 Zusammenhang der Geschwindigkeiten 106
    - 3.9.2.3 Zeitliche Änderung von Skalaren und Vektoren 107
    - 3.9.2.4 Zusammenhang der Beschleunigungen 109
  - 3.9.3 Bewegungsgleichung des Massenpunkts 109
    - 3.9.3.1 Galilei-Transformation 111
    - 3.9.3.2 Konstante Relativbeschleunigung 113
    - 3.9.3.3 Konstante Rotation 113
- Aufgaben 114
- 4 Anwendung der Newton'schen Grundgleichung auf spezielle Probleme der Dynamik eines Massenpunkts 117**
  - 4.1 Eindimensionale Bewegungen. Freier Fall aus großer Entfernung 117
    - 4.1.1 Rein zeitabhängige Kraft 118
    - 4.1.2 Rein ortsabhängige Kraft 119
    - 4.1.3 Rein geschwindigkeitsabhängige Kraft 120
    - 4.1.4 Freier Fall aus großer Entfernung (ohne Reibung) 120

4.1.5	Fall in einem widerstehenden Medium	123
4.2	Schwingungen	126
4.2.1	Harmonische Schwingungen ohne Dämpfung	126
4.2.1.1	Verwendung des Energiesatzes	129
4.2.1.2	Lösung mit Exponentialansatz	130
4.2.1.3	Rückführung auf eine komplexe Differentialgleichung 1. Ordnung	131
4.2.1.4	Phasenraum	132
4.2.1.5	Matrixdarstellung der Bewegungsgleichung	134
4.2.2	Dreidimensionaler isotroper harmonischer Oszillator	134
4.2.3	Gedämpfte Schwingung	135
4.2.3.1	Gedämpfte oszillierende Bewegung	136
4.2.3.2	Aperiodische Kriechbewegung oder überdämpfte Schwingung	138
4.2.3.3	Aperiodischer Grenzfall	140
4.2.4	Erzwungene Schwingung. Resonanz	140
4.2.5	Methode der Green'schen Funktion	144
4.2.5.1	Beschreibung einer stoßartigen Kraft: Dirac'sche $\delta$ -Funktion	146
4.2.5.2	Green'sche Funktion der Schwingungsgleichung	148
4.2.5.3	Erzwungene Schwingung mit beliebiger Störkraft	150
4.2.5.4	Resonanz des ungedämpften Oszillators	153
4.3	Bewegung eines Massenpunkts im Gravitationsfeld	153
4.3.1	Flächensatz und Energiesatz	154
4.3.1.1	Formulierung des Problems in ebenen Polarkoordinaten	154
4.3.1.2	Qualitative Diskussion der Bewegung	155
4.3.1.3	Berechnung der Bahnkurve	156
4.3.1.4	Berechnung der Umlaufzeit	158
4.3.1.5	Zeitabhängigkeit der Bahnbewegung	159
	Aufgaben	161
<b>5</b>	<b>Newton'sche Mechanik von Punktsystemen</b>	<b>163</b>
5.1	Punktsysteme und darauf wirkende Kräfte	163
5.1.1	Äußere und innere Kräfte	163
5.1.2	Eingeprägte und Zwangskräfte	166
5.2	Impulssatz und Schwerpunktsatz	167
5.2.1	Impulssatz	167
5.2.2	Schwerpunktsatz	168
5.2.3	Satz von der Erhaltung des Gesamtimpulses	171
5.2.4	Bewegung durch Rückstoß	172
5.3	Der Drehimpuls eines Systems von Massenpunkten	175
5.3.1	Drehimpulssatz	175
5.3.2	Drehimpulserhaltungssatz	176
5.3.3	Abhängigkeit des Drehimpulses vom Bezugssystem	178

- 5.3.3.1 Zwei ruhende Bezugspunkte  $O$  und  $O'$  178
- 5.3.3.2 Bewegter Schwerpunkt als Bezugssystem 179
- 5.4 Energiesatz 181
- 5.4.1 Satz über die Änderung der kinetischen Energie 181
- 5.4.2 Der Energiesatz 182
- 5.4.3 Zerlegung der potentiellen und kinetischen Energie 183
- 5.4.4 Die zehn ersten Integrale eines abgeschlossenen, konservativen System 186
- 5.5 Schwingungen von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden 187
- 5.5.1 \* Potentielle und kinetische Energie. Gleichgewicht 187
- 5.5.2 \* Bewegungsgleichung. Eigenwerte und Eigenvektoren 191
- 5.5.3 \* Allgemeine Lösung, Normalkoordinaten, Normalschwingungen 196
- 5.5.4 \* Beispiel: gekoppelte Pendel 197
- Aufgaben 201
  
- 6 Lagrange-Formulierung der Mechanik 203**
- 6.1 Das Prinzip der virtuellen Arbeit und das d'Alembert'sche Prinzip 203
- 6.1.1 Das d'Alembert'sche Prinzip für Punktsysteme 203
- 6.1.2 Gleichgewicht eines Systems von Massenpunkten 206
- 6.2 Lagrange-Gleichungen 1. Art für Punktsysteme 207
- 6.2.1 Einteilung der Zwangsbedingungen 207
- 6.2.2 Lagrange-Gleichungen 1. Art 212
- 6.2.3 Energiesatz 213
- 6.3 Das Hamilton'sche Prinzip 215
- 6.3.1 Differential- und Integralprinzipien 215
- 6.3.2 Festlegung der zulässigen Vergleichsbahnen 217
- 6.3.3 Ableitung des Hamilton'schen Prinzips aus dem d'Alembert'schen Prinzip 220
- 6.3.4 Hamilton'sches Prinzip bei Kräften mit Potential 221
- 6.4 Grundaufgabe der Variationsrechnung 224
- 6.4.1 Mathematische Beispiele für Extremalprobleme 224
- 6.4.2 Zurückführung des Variationsproblems auf Euler-Lagrange-Gleichungen 229
- 6.4.3 Variationen und Variationsableitungen 232
- 6.4.4 Variationsprobleme mit Nebenbedingungen 233
- 6.4.4.1 Nebenbedingungen in integrierter Form 233
- 6.4.4.2 Nebenbedingungen in differentieller Form 234
- 6.4.5 Anwendungen der Euler-Lagrange-Gleichung 235
- 6.4.5.1 Kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene 235
- 6.4.5.2 Seil der Länge  $l$  unter dem Einfluss der Schwerkraft 236

6.5	Lagrange'sche Bewegungsgleichung 2. Art	238
6.5.1	Euler-Lagrange-Gleichungen der Mechanik	238
6.5.2	Euler-Lagrange-Gleichungen mit holonomen Nebenbedingungen	238
6.5.3	Allgemeine Koordinaten und Geschwindigkeiten	239
6.5.4	Lagrange-Gleichungen 2. Art für holonome Systeme mit Potential	242
6.5.5	Lagrange-Gleichungen 2. Art für nichtkonservative holonome Systeme	245
6.5.6	Bewegung eines Teilchens in einem elektromagnetischen Feld	247
6.5.7	* Integrale der Lagrange-Gleichungen. Allgemeine Impulskoordinaten. Erhaltungssätze	250
6.5.7.1	* Zyklische Variable, verallgemeinerte Impulse	250
6.5.7.2	* Explizit zeitunabhängige Lagrange-Funktion	251
6.5.8	* Nichtholonome Systeme. Zwangsbedingungen. Zwangskräfte	252
6.5.8.1	* Zwangsbedingungen. Freiheitsgrade	252
6.5.8.2	* Bewegungsgleichungen	255
6.6	* Symmetrien und Erhaltungssätze (Theorem von E. Noether)	259
	Aufgaben	267
<b>7</b>	<b>Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen</b>	<b>269</b>
7.1	Systeme mit einer Lagrange-Funktion (einem kinetischen Potential)	269
7.2	Hamilton-Funktion. Kanonische Gleichungen	270
7.3	Physikalische Bedeutung der Hamilton-Funktion	271
7.4	Beispiele	272
7.4.1	Massenpunkt mit konservativer Kraft. Kartesische Koordinaten	272
7.4.2	Massenpunkt mit konservativer Kraft. Kugelkoordinaten	273
7.4.3	Hamilton-Funktion für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld	273
7.5	* Poisson-Klammern	274
7.6	Erhaltungssätze. Zyklische Variable	275
7.6.1	Energieerhaltungssatz	275
7.6.2	Zyklische Variable	276
7.7	* Kanonische Transformationen	277
7.7.1	* Punkttransformation und kanonische Transformation	277
7.7.2	* Kanonische Transformationen	278
7.7.3	* Beispiele für kanonische Transformationen	280
7.7.3.1	* Identische Transformationen	280
7.7.3.2	* Vertauschung von Koordinaten und Impulsen	281

7.7.3.3	* Punkttransformation als Spezialfall einer kanonischen Transformation	281
7.7.3.4	* Harmonischer Oszillator	282
7.7.4	* Infinitesimale kanonische Transformation	283
7.7.5	* Invarianz der Poisson-Klammern	284
7.8	* Liouville-Gleichung. Bewegung im Phasenraum	286
7.8.1	* Konfigurationsraum und Phasenraum	286
7.8.2	* Bewegungsgleichungen im Phasenraum	287
7.8.3	* Symplektische Matrizen	288
7.8.4	* Jacobi-Matrix für kanonische Transformationen	289
7.8.5	* Benachbarte Bahnkurven	291
7.8.6	* Liouville-Gleichung	293
7.8.7	* Liouville-Theorem	296
7.9	* Hamilton-Jacobi'sche partielle Differentialgleichung	296
7.9.1	* Ableitung der Gleichung	296
7.9.2	* Bedeutung der Hamilton-Jacobi-Gleichung	298
7.9.3	* Zusammenhang mit der Wirkungsfunktion	298
7.9.4	* Wirkungsfunktion bei zeitunabhängiger Hamilton-Funktion	299
7.9.5	* Beispiel: Freier Massenpunkt in der Ebene	300
7.9.6	* Geometrische Bedeutung der Wirkungsfunktion	301
7.10	* Periodische Bewegung. Wirkungs- und Winkelvariable	303
7.10.1	* Systeme mit einem Freiheitsgrad	304
7.10.2	* Separable Systeme mit mehreren Freiheitsgraden	308
7.11	* Reguläre und Irreguläre Bewegung konservativer Systeme	310
7.11.1	* Charakterisierung der Dynamik im Phasenraum	310
7.11.2	* Integrierte Systeme	311
7.11.3	* Störungstheorie	313
7.11.4	* Kolmogorov-Arnold-Moser-Theorem	315
7.11.5	* Das Poincaré-Birkhoff-Theorem	316
	Aufgaben	318

## **8 Mechanik des starren Körpers 321**

8.1	Definition und Freiheitsgrade des starren Körpers	321
8.2	Koordinatensysteme und Bewegung eines starren Körpers	322
8.2.1	Koordinatensysteme	322
8.2.2	Euler'sche Winkel	322
8.2.3	Infinitesimale Verschiebung des Körpers	326
8.2.4	Wechsel des Bezugssystems	326
8.3	Kinetische Energie des starren Körpers. Trägheitstensor	328
8.3.1	Kinetische Energie des starren Körpers	328
8.3.2	Der Trägheitstensor	329
8.3.2.1	Definition des Trägheitstensors	329

8.3.2.2	Hauptträgheitsachsen	331
8.3.2.3	Trägheitsellipsoid	333
8.3.2.4	Der Satz von Steiner	333
8.3.2.5	Berechnung des Trägheitstensors	334
8.3.2.6	Beispiele	335
8.4	Drehimpuls und Drehmoment. Bewegungsgleichungen eines starren Körpers	338
8.5	Energie- und Drehimpulssatz des kräftefreien Kreisels	340
8.6	Die Bewegungsgleichungen eines in einem Punkt festgehaltenen Körpers	341
8.7	Diskussion von Sonderfällen	343
8.7.1	Isotroper Trägheitstensor	343
8.7.2	Euler'sche Gleichungen im Hauptachsensystem für einen kräftefreien Kreisel	344
8.7.2.1	Allgemeine Lösung	344
8.7.2.2	Untersuchung der Stabilität der Rotation um Hauptträgheitsachsen	344
8.7.2.3	Freie Rotation des symmetrischen Kreisels	346
8.7.2.4	Freie Rotation um eine beliebige Achse	347
	Aufgaben	349
<b>A</b>	<b>Zusammenhang zwischen den Ellipsenparametern in kartesischen und Polarkoordinaten</b>	<b>353</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>355</b>
	<b>Sachverzeichnis</b>	<b>357</b>