

# Galois Groups over $\mathbf{Q}$

## TABLE OF CONTENTS

	PAGE
PREFACE . . . . .	v
G. W. Anderson	
NORMALIZATION OF THE HYPERADELIC GAMMA FUNCTION . . . . .	1
1. Gaussian units . . . . .	7
2. The structure of $M_{r,\ell}$ . . . . .	13
3. Normalization . . . . .	23
D. Blasius and D. Ramakrishnan	
MAASS FORMS AND GALOIS REPRESENTATIONS . . . . .	33
1. Automorphic forms via representations . . . . .	37
2. Holomorphic automorphic forms for $\mathrm{GSp}(4)$ . . . . .	40
3. Geometric automorphic forms . . . . .	44
4. Reductions . . . . .	46
5. Heuristics and conjectures . . . . .	49
6. Transfer of problem to $\mathrm{GSp}(4, \mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$ . . . . .	54
7. Hypothesis 1: structure of global $L$ -packets for $\mathrm{GSp}(4)$ . . . . .	57
8. An analytic estimate for the conjugates of Maass forms . . . . .	59
9. Hypothesis 2: Galois representations attached to Siegel modular forms of higher weight . . . . .	66
10. The main theorem . . . . .	68
P. Deligne	
LE GROUPE FONDAMENTAL DE LA DROITE PROJECTIVE MOINS	
TROIS POINTS . . . . .	79
0. Terminologie et notations . . . . .	87
1. Motifs mixtes . . . . .	89
2. Exemples . . . . .	105
3. Torseurs sous $\mathbf{Z}(n)$ . . . . .	112
4. Rappels sur les Ind-objets . . . . .	127
5. Géométrie algébrique dans une catégorie tannakienne . . . . .	132

6. Le groupe fondamental d'une catégorie tannakienne . . . . .	141
7. Géométrie algébrique dans la catégorie tannakienne des systèmes de réalisations: interprétations . . . . .	147
8. Extensions itérées de motifs de Tate . . . . .	163
9. Rappels sur les groupes unipotents . . . . .	175
10. Théories du $\pi_1$ . . . . .	179
Groupoïdes . . . . .	179
Théorie classique . . . . .	183
Théorie profinie . . . . .	187
Théorie algébrique . . . . .	193
11. Le Frobenius cristallin du $\pi_1$ de Rham . . . . .	204
12. La filtration de Hodge du $\pi_1$ . . . . .	212
13. Le $\pi_1$ motivique . . . . .	220
14. Exemple: le $\pi_1$ motivique de $\mathbf{G}_m$ . . . . .	225
15. Points bases à l'infini . . . . .	229
Théorie classique . . . . .	231
Théorie profinie . . . . .	237
Théorie algébrique . . . . .	242
Compatibilités . . . . .	246
Théorie motivique . . . . .	252
16. $\mathbf{P}^1$ moins trois points: un quotient de $\pi_1$ motivique . . . . .	255
17. Relations de distribution: voie géométrique . . . . .	270
18. Le torseur $P_{d,k} + (-1)^k \in P_{d,k}$ est de torsion: voie géométrique . . . . .	277
19. Comparaison des $\mathbf{Z}(h)$ -torseurs des paragraphes 3 et 16 . . . . .	283
Index des notations . . . . .	293

Y. Ihara

<b>THE GALOIS REPRESENTATION ARISING FROM <math>\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}</math> AND TATE TWISTS OF EVEN DEGREE . . . . .</b>	<b>299</b>
1. Preliminaries and statement of the Theorem . . . . .	300
2. Reducing the proof of the Theorem to two key lemmas . . . . .	304
3. Proof of Key Lemma A . . . . .	307
4. Proof of Key Lemma B . . . . .	309
5. Remarks and discussion . . . . .	310

## U. Jannsen

ON THE  $\ell$ -ADIC COHOMOLOGY OF VARIETIES OVER NUMBER FIELDS

AND ITS GALOIS COHOMOLOGY . . . . .	315
1. The basic conjecture . . . . .	317
2. Connections with algebraic $K$ -theory . . . . .	322
3. Connections with Iwasawa theory . . . . .	329
4. Global results . . . . .	335
5. The local case . . . . .	341
6. The case $n \leq i + 1 \leq 2n$ . . . . .	349
7. The case $i = 1$ : abelian varieties . . . . .	353

## B. H. Matzat

## RATIONALITY CRITERIA FOR GALOIS EXTENSIONS . . . . . 361

1. Fundamental groups . . . . .	363
2. Class numbers of generators . . . . .	365
3. Topological automorphisms . . . . .	369
4. Braids . . . . .	374
5. Braids and topological automorphisms together . . . . .	378

## B. Mazur

## DEFORMING GALOIS REPRESENTATIONS . . . . . 385

1. Universal deformation of representations . . . . .	387
1.1 Deformations . . . . .	387
1.2 Existence of universal deformation rings . . . . .	388
1.3 Functoriality . . . . .	392
1.4 One-dimensional representations . . . . .	396
1.5 The duality involution . . . . .	398
1.6 Obstructions . . . . .	398
1.7 Ordinary representations . . . . .	400
1.8 Schur-type results . . . . .	401
1.9 A few simple examples . . . . .	403
1.10 Global Galois representations . . . . .	404
1.11 Remarks on Galois representations to $SL_2(\mathbb{F}_p)$ . . . . .	406
1.12 Neat residual representations . . . . .	407
1.13 Neat $S_3$ -extensions of $\mathbb{Q}$ . . . . .	408
2. The internal structure of universal deformation spaces . . . . .	411
2.1 General glossary . . . . .	411
2.2 Special dihedral representations . . . . .	414

2.3 The origin . . . . .	415
2.4 The globally dihedral locus . . . . .	416
2.5 The ordinary locus . . . . .	417
2.6 The inertially reducible locus . . . . .	422
2.7 The inertially metabelian and the inertially dihedral locus . . .	425
2.8 Loci of constant $p$ -adic Hodge type . . . . .	430

**K. Wingberg**

**GALOIS GROUPS OF POINCARÉ TYPE OVER ALGEBRAIC NUMBER**

<b>FIELDS</b> . . . . .	439
1. The function field case . . . . .	439
2. Classification of Demuškin groups . . . . .	440
3. $p$ -adic number fields . . . . .	441
4. $n$ -local fields . . . . .	442
5. The absolute Galois group of a $p$ -adic number field . . . . .	442
6. Global number fields . . . . .	445