

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1. — Fonctions de variable réelle	1
1.1 Topologie de \mathbb{R} , la droite numérique	1
1.2 Topologie de \mathbb{R} , la droite numérique achevée	2
1.3 Limites de fonctions (ou de suites)	3
1.4 Continuité des fonctions	5
1.5 Inversion des fonctions	7
1.6 Calcul différentiel (Dérivabilité. Différentiabilité. Théorème de Rolle, de Taylor)	7
1.7 Etude locale des fonctions (Développements limités)	11
1.8 Fonctions usuelles (Fonctions circulaires, circulaires inverses, log, exp, puissances. Fonctions hyperboliques et inverses)	14
Chapitre 2. — Espaces métriques	24
2.1 Définitions (Distances, boules)	24
2.2 Définitions relatives à la topologie d'un espace métrique	26
2.3 Espaces vectoriels normés	27
2.4 Suites et séries	27
2.5 Applications continues (Homomorphismes, distances équivalentes)	29
2.6 Opérations sur les espaces métriques (Sous-espaces. Produits)	32
2.7 Opérations sur les espaces vectoriels normés. (Sous-espaces. Produits. Somme directe topologique. Espaces d'applications linéaires continues)	33
2.8 Compacts (Propriétés des fonctions continues)	34
2.9 Connexes (Composantes connexes et propriétés des fonctions continues. Connexité par arcs)	36
2.10 Applications différentiables dans les normés complets	38
2.11 Cas particulier des fonctions d'une variable	40
2.12 Fonctions de plusieurs variables	41
2.13 Formule des Accroissements finis et de Taylor-Lagrange	43
2.14 Inversion locale des applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p	44
2.15 Fonctions implicites	45
2.16 Formes différentielles (et différentiation extérieure)	46
2.17 Analyse vectorielle (Opérateurs : gradient, divergence)	49
Chapitre 3. — Notions de topologie générale	54
3.1 Espace topologique	54
3.2 Bases de filtre. Filtres	55
3.3 Continuité (et application aux sous-espaces, espaces produits, espaces quotients)	57
3.4 Compacts	58
3.5 Connexion	59
3.6 Note sur les espaces complets	60
Chapitre 4. — Sommation	62
4.1 Convergence des séries dans E (espace normé)	62
4.2 Séries de nombres positifs	64
4.3 Séries de réels quelconques	66
4.4 Familles sommables de réels positifs	67
4.5 Fonctions définies par des séries (ou des suites). (Convergence uniforme. Théorèmes sur la continuité, la dérivabilité et l'intégrabilité)	70
4.6 Cas particulier des séries entières	73

4.7	Fonctions transcendantes élémentaires complexes ($\exp z$, $\operatorname{sh} z$, $\sin z$, ...)	76
4.8	Fonctions définies par des séries. (Hypergéométriques. Polynômes de Jacobi, de Laguerre. Fonctions de Bessel, de Hankel)	78
Chapitre 5. — Intégration		79
5.1	Des fonctions bornées à support compact dans \mathbb{R} . (Intégrales des fonctions en escalier. Intégrale de Riemann)	79
5.2	Intégrales de formes différentielles de degré. (Primitivation et intégration. Procédés de primitivation)	84
5.3	Calcul de primitives. (Exponentielles polynômes. Fractions rationnelles, trigonométriques. Intégrales abéliennes)	87
5.4	Intégration des fonctions bornées à support compact dans \mathbb{R}^n . (Intégrales multiples)	90
5.5	Intégrales de Stieltjes	94
5.6	Intégrale de Lebesgue des fonctions réelles de variables réelles	96
5.7	Intégrales convergentes des fonctions d'une variable réelle	99
5.8	Fonctions définies par des intégrales (sinus intégral, cosinus intégral, logarithme intégral, fonction d'erreur, fonctions elliptiques, intégrale dépendant d'un paramètre, fonctions eulériennes Γ et B , fonctions de Bessel)	102
5.9	Intégrales multiples généralisées	107
5.10	Intégrales curvilignes, de surface, de volumes (formules de Green Riemann, Stokes, Ostrogradski, calculs de longueurs, d'aires, de volumes, de masses de centres d'inertie de moments d'inertie, théorème de Guldin)	109
Chapitre 6. — Orthogonalité		116
6.1	Formes hermitiennes. Espaces préhilbertiens (Orthogonalité, projection orthogonale sur un sous-espace complet. Systèmes orthonormés. Séries de Fourier. Inégalité de Bessel. Egalité de Parseval)	116
6.2	Polynômes orthogonaux (Jacobi-Legendre, Tchebycheff, Hermite, Laguerre, Propriétés générales)	121
6.3	Théorie des séries de Fourier trigonométriques	124
Chapitre 7. — Fonctions analytiques de la variable complexe		128
7.1	Analyticité (Exemples. Propriétés. Opérations sur les fonctions analytiques. Principe du maximum)	128
7.2	Théorie de Cauchy des fonctions holomorphes (Conditions de Cauchy. Intégration sur des chemins de \mathbb{C} homotopie. Ouverts simplement connexes. Indices de lacets. Identité entre l'analyticité et l'holomorphie. Fonctions harmoniques. Théorème de convergence de Weierstrass)	131
7.3	Théorie des résidus (Série de Laurent. Points singuliers. Calcul des résidus)	138
7.4	Résolution des équations dans \mathbb{C} (Théorème de Rouché. Inversion des fonctions analytiques)	140
7.5	Fonctions complexes définies par inversion des fonctions analytiques (Fonctions logarithmes, puissance, arc sin et arc tg complexes)	141
7.6	Applications du théorème des résidus (Calcul d'intégrales portant sur des fonctions trigonométriques, rationnelles, logarithmes, puissances irrationnelles. Lemmes de Jordan)	144
7.7	Transformations conformes (Transformations circulaires, de Joukowski, de Schwarz. Applications à la Physique)	148
7.8	Applications au calcul symbolique des matrices ($\exp A$, $\cos A$, $\sin A$ où A est une matrice carrée)	151

<i>Chapitre 8. — Equations différentielles</i>	154
8.1 Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz	154
8.2 Intégration des systèmes différentiels linéaires à n inconnues scalaires (Wronskien de solutions, matrice fondamentale, matrice résolvante. Cas particuliers des équations linéaires à coefficients constants).....	157
8.3 Intégration des certaines équations scalaires du 1 ^{er} ordre (A variables séparables, homogènes, Riccati, Bernoulli, Lagrange).....	160
8.4 Intégration de certaines équations du second ordre (Equation. Equation d'Euler)	162
8.5 Intégrales premières	163
8.6 Equations aux dérivées partielles du 1 ^{er} ordre (Méthode de Lagrange et Charpit. Problème de Cauchy. Application au facteur intégrant).....	165
8.7 Equations aux dérivées partielles du second ordre (Méthode particulière de Fourier)	167
8.8 Fonctions définies par des équations différentielles du second ordre (Equations de Fuchs. Equation de Gauss, de Bessel, de Laguerre, d'Hermite).....	169
8.9 Résolution de certains problèmes aux limites (Equations de Sturm, Liouville. Fonctions de Green. Equation intégrale de Fredholm).....	171
<i>Chapitre 9. — Calcul des variations</i>	174
9.1 Extréma des fonctions numériques (Multiplicateurs de Lagrange).....	174
9.2 Minimisation d'une intégrale simple (Equations d'Euler. Résolution des problèmes à limites fixes, à limites variables, avec contraintes ; problème isopérimétrique)	175
9.3 Minimisation d'intégrales doubles (Note sur l'action hamiltonienne et les équations de Lagrange en mécanique)	179
<i>Chapitre 10. — Transformations de Fourier et Laplace</i>	181
10.1 Transformation de Fourier des fonctions sur \mathbb{R} (Transformation dans $L^1(\mathbb{R})$, dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Convolution. Inversion de \mathcal{F} . Théorème de Plancherel dans $L^2(\mathbb{R})$.)	181
10.2 Transformation de Laplace dans \mathbb{R} (Abscisse de sommabilité de Laplace. Théorème de Borel. Inversion. Transformation de Mellin-Fourier. Calcul des inverses)	184
10.3 Applications aux équations différentielles linéaires.....	187
10.4 Applications aux équations aux dérivées partielles linéaires.....	188
10.5 Equations intégrales ou intégro-différentielles	189
<i>Chapitre 11. — Les distributions</i>	190
11.1 Définitions et exemples (Distributions de Dirac. Valeurs principales. Parties finies)	190
11.2 Propriétés des Distributions (Dérivation. Produit par une fonction indéfiniment dérivable. Support).....	192
11.3 Produit direct de distributions	193
11.4 Convolution de deux distributions (Algèbres de convolutions et applications aux équations différentielles à coefficients constants, aux équations intégrales de Volterra. Calcul symbolique).....	194
11.5 Transformation de Fourier des distributions ($\mathcal{S}'(\mathbb{R})$). Distributions tempérées. Notions sur la transformation de Fourier à n variables).....	197
11.6 Transformation de Laplace des distributions.....	199
Formulaire et tables	201