

INHALTSVERZEICHNIS

Erster Abschnitt

Grundregeln der Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

Begriff und Bedeutung eines Differentialquotienten

Nr.		Seite
1.	Einleitende Betrachtungen	I
2.	Differentialrechnung und Integralrechnung	9
3.	Differenzierbarkeit	11
4.	Einseitige und unendliche Ableitungen	16
5.	Differenzierbarkeit in einem Intervall	18
6.	Geometrische und physikalische Bedeutung der Ableitung	19

Grundregeln der Differentialrechnung

7.	Vorbemerkungen	20
8.	Differentiation einer Konstanten und der Funktion x	23
9.	Differentiation einer Summe	24
10.	Differentiation eines Produktes	25
11.	Differentiation einer Potenz	27
12.	Differentiation eines Quotienten	28
13.	Differentiation der rationalen Funktionen	29
14.	Differentiation der Exponentialfunktion	30
15.	Differentiation der Logarithmen. Natürliche Logarithmen	31
16.	Differentiation der Kreis- und Hyperbelfunktionen	34
17.	Differentiation einer mittelbaren Funktion	36
18.	Differentiation der allgemeinen Potenz und der Wurzeln	41
19.	Differentiation einer inversen Funktion	45
20.	Differentiation der zyklometrischen und der Area-Funktionen	48
21.	Differenzierbarkeit geschlossener analytischer Ausdrücke	53
22.	Stetigkeit und Differenzierbarkeit	56
23.	Gründe für die Unzulänglichkeit der Anschauung und für die Bevorzugung differenzierbarer Funktionen	60
24.	Vermischte Übungsaufgaben	63

Differentiale. Mittelwertsatz. Taylorscher Satz

Differentiale. Mittelwertsatz	
Nr.	Seite
25. Das Differential einer Funktion $f(x)$	67
26. Vorteile der differentiellen Schreibweise	70
27. Die Bedeutung des Vorzeichens der Ableitung	72
28. Der Satz von Rolle	74
29. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung	76
30. Einfachste Anwendungen des Mittelwertsatzes	78
31. Erweiterung des Mittelwertsatzes	80

Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung

32. Die Ableitung $f'(x)$ als Funktion von x	81
33. Ableitungen zweiter und höherer Ordnung	83
34. Physikalische Bedeutung der zweiten Ableitung	84
35. Die höheren Ableitungen der elementaren Funktionen	86
36. Die höheren Ableitungen einer Summe und eines Produktes	89
37. Die höheren Ableitungen einer mittelbaren Funktion	90
38. Höhere Differenzen	91
39. Differentiale höherer Ordnung	94
40. Geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung. Konvexität und Konkavität	96
41. Ermittlung der Gestalt des geometrischen Bildes einer Funktion	101
42. Newtons Näherungsverfahren zur Auflösung einer Gleichung und die Regula falsi	104

Der Taylorsche Satz

43. Entwicklung einer ganzen rationalen Funktion nach Potenzen eines Zuwachses ihres Arguments	110
44. Die Sätze von Taylor und MacLaurin	111
45. Beweis der Sätze von Taylor und MacLaurin	114

Entwicklung der elementaren Funktionen

46. Bedeutung des Taylorschen Satzes	116
47. Darstellung der Exponentialfunktion	118
48. Berechnung der Exponentialfunktion, insbesondere der Zahl e	118
49. Irrationalität von e	122
50. Entwicklung der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$	123
51. Entwicklung der Logarithmusfunktion	125
52. Berechnung der Logarithmen	127
53. Allgemeine Exponentialfunktion und allgemeine Potenz	132
54. Erweiterung des Binomiallehrsatzes	133
55. Entwicklung der Funktion $\arctg x$	137
56. Berechnung der Zahl π	139
57. Entwicklung der Funktion $\arcsin x$	142

Inhaltsverzeichnis

Dritter Abschnitt

Minima und Maxima. Grenzwerte

Minima und Maxima

Nr.	Seite
58. Begriff eines Minimums oder Maximums	144
59. Bedingungen für das Auftreten eines Minimums oder Maximums	145
60. Beispiele	150

Bestimmung von Grenzwerten

61. Allgemeine Bemerkungen über die Bestimmung von Grenzwerten	164
62. Erste Grundaufgabe: Bestimmung des Grenzwertes eines Bruches, dessen Zähler und Nenner beide gegen Null streben	169
63. Zweite Grundaufgabe: Bestimmung des Grenzwertes eines Bruches, dessen Nenner gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt	174
64. Zurückführung anderer Aufgaben auf die Grundaufgaben	178
65. Zusätze	180

Unendlich klein, unendlich groß

66. Unendlich klein werdende Funktionen	183
67. Von verschiedener Ordnung unendlich klein werdende Funktionen	184
68. Von verschiedener Ordnung unendlich groß werdende Funktionen	187
69. o und O	189

Vierter Abschnitt

Unendliche Reihen

70. Vorbemerkungen	194
71. Unendliche Reihen	195
72. Konvergenz und Divergenz	198
73. Die Taylorsche Reihe	201

Reihen mit positiven Gliedern

74. Das I. Hauptkriterium	204
75. Die beiden Vergleichskriterien	207
76. Das Wurzel- und das Quotientenkriterium	211

Reihen mit beliebigen Gliedern

77. Das II. Hauptkriterium	214
78. Das Rechnen mit konvergenten Reihen	216
79. Absolute Konvergenz	221
80. Bedingte und unbedingte Konvergenz	224
81. Der große Umordnungssatz	228
82. Multiplikation unendlicher Reihen	233
83. Das Abelsche Konvergenzkriterium	237

Inhaltsverzeichnis

Potenzreihen

Nr.		Seite
84.	Konvergenzradius einer Potenzreihe	239
85.	Identitätssatz für Potenzreihen	242
86.	Transformation auf einen neuen Mittelpunkt. Stetigkeit und Differenzierbarkeit	246
87.	Die Taylorsche Reihen	249
88.	Der Abelsche Grenzwertsatz	250
89.	Das Rechnen mit Potenzreihen	253
90.	Einsetzen einer Potenzreihe in eine andere	256
91.	Bemerkungen und Beispiele	259
92.	Division durch eine Potenzreihe	261
93.	Die Bernoullischen Zahlen	264
94.	Übungsaufgaben	266

Funktionenfolgen. Reihen mit veränderlichen Gliedern

95.	Erklärungen	266
96.	Gleichmäßige und ungleichmäßige Konvergenz	269
97.	Gliedweise Grenzübergänge	273
98.	Kriterien für gleichmäßige Konvergenz	277
99.	Anwendungen und Beispiele	279
100.	Beispiel einer durchweg stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion	280

Unendliche Produkte

101.	Unendliche Produkte	283
102.	Unendliche Produkte mit positiven Gliedern	285
103.	Produkte mit beliebigen Gliedern. Absolute Konvergenz	287
104.	Nicht-absolute Konvergenz	289

Fünfter Abschnitt

Grenzwerte und Stetigkeit der Funktionen von mehreren Veränderlichen

Punktfolgen in mehrdimensionalen Räumen

105.	Mehrdimensionale Räume	291
106.	Abstand. Dreiecksungleichung. Intervalle. Kugeln. Umgebungen	293
107.	Geraden. Polygonzüge. Kurven. Vektoren	296
108.	Koordinatentransformation	298
109.	Punktfolgen in n -dimensionalen Räumen	300
110.	Häufungspunkte	301
111.	Punktfolgen. Konvergenz	303
112.	Weitere Erklärungen und Sätze	304
113.	Gebiete. Kontinua	305

Funktionen von mehreren Veränderlichen

114.	Feste und veränderliche Stellen. Funktionen	307
115.	Geometrische Darstellung einer Funktion von mehreren Veränderlichen	309
116.	Grenzwerte	311
117.	Stetigkeit	312

Inhaltsverzeichnis

Nr.	Seite
118. Stetigkeit einer mittelbaren Funktion	315
119. Sätze über Funktionen, die in einem abgeschlossenen Bereiche stetig sind . . .	318

Sechster Abschnitt

Ausdehnung der Differentialrechnung auf Funktionen von mehreren Veränderlichen

Partielle Ableitungen

120. Partielle Ableitungen erster Ordnung	321
121. Partielle Ableitungen höherer Ordnung	326
122. Hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Gleichung $f_{xy} = f_{yx}$	329
123. Unabhängigkeit partieller Ableitungen höherer Ordnung von der Reihenfolge der Differentiationen	334
124. Vollständige Differenzierbarkeit und vollständige Differentiale	335
125. Richtungsableitung. Gradient	342
126. Ausdehnung der Regel für die Differentiation einer mittelbaren Funktion . . .	343
127. Ausdehnung des Mittelwertsatzes	348
128. Ausdehnung des Taylorschen Satzes	350
129. Harmonische Funktionen	353

Siebenter Abschnitt

Unentwickelte Funktionen Minima und Maxima der Funktionen von mehreren Veränderlichen

Unentwickelte Funktionen

130. Gleichungen zwischen mehreren Veränderlichen	358
131. Unentwickelte oder implizite Funktionen	359
132. Höhere Ableitungen einer unentwickelten Funktion	367
133. Unentwickelte Funktionen von mehreren Veränderlichen	370
134. Systeme unentwickelter Funktionen von mehreren Veränderlichen	374
135. Abbildung ebener Bereiche	378
136. Inverse Abbildungen	382

Minima und Maxima der Funktionen von mehreren Veränderlichen

137. Minima und Maxima der Funktionen von mehreren Veränderlichen	386
138. Beispiele	392
139. Minima und Maxima mit Nebenbedingungen	394

Achter Abschnitt

Die Begriffe Kurve und Fläche

140. Notwendigkeit einer genauen Erklärung	398
141. Stetige Kurven	398
142. Beispiele	400

Inhaltsverzeichnis

Nr.		Seite
143.	Beispiel einer Peanokurve	406
144.	Jordansche Kurvenstücke	410
145.	Die v. Kochsche Kurve	412
146.	Rektifizierbare Kurven. Wege	415
147.	Glatte Kurven	416
148.	Stetig gekrümmte und analytische Kurvenstücke	417
149.	Parameterdarstellung eines Kurvenstücks	418
150.	Darstellung eines ebenen Kurvenstücks durch eine Gleichung. Implizite und explizite Darstellung	420
151.	Darstellung eines räumlichen Kurvenstücks durch zwei Gleichungen	424
152.	Darstellung eines Kurvenstücks in Polarkoordinaten	425
153.	Der Begriff Fläche	426
154.	Darstellung eines Flächenstücks durch eine einzige Gleichung	430

Neunter Abschnitt

Kurven und Flächen zweiter Ordnung

Kurven zweiter Ordnung

155.	Gleichwertigkeit algebraischer Gleichungen	433
156.	Parabel, Ellipse, Hyperbel	434
157.	Ausartungen	444
158.	Zurückführung der Gleichung zweiten Grades auf möglichst einfache Formen	444
159.	Zusammenfassung	450

Flächen zweiter Ordnung

160.	Die Hauptachsentransformation	457
161.	Übersicht über die Flächen zweiter Ordnung	461

Zehnter Abschnitt

Elemente der Differentialgeometrie

Tangenten und Normalen

162.	Tangente, Normale und Normalebene	471
163.	Gleichungen von Tangente, Normale und Normalebene	473
164.	Richtungskosinus der Tangente einer ebenen Kurve	475
165.	Richtungskosinus der Tangente einer räumlichen Kurve	478
166.	Beispiele und Übungsaufgaben	480
167.	Tangentenebene eines Flächenstücks	487

Krümmung ebener Kurvenstücke

168.	Krümmungsmittelpunkt als Grenzlage des Schnittpunktes zweier Normalen	491
169.	Krümmungskreis als Grenzlage eines Kreises durch drei Punkte	495
170.	Krümmung eines durch eine einzige Gleichung gegebenen Kurvenstücks	499
171.	Art der Berührung von Kurve und Krümmungskreis	501
172.	Evolute	503
173.	Beispiele und Übungsaufgaben	506

Inhaltsverzeichnis

Einhüllende ebener Kurvenscharen

Nr.		Seite
174.	Beispiele	513
175.	Einhüllende einer einfach-unendlichen ebenen Kurvenschar	519
176.	Hinreichende Bedingungen für das Vorhandensein einer Einhüllenden	519
177.	Schnittpunkte benachbarter Kurven einer Schar	525

Elfter Abschnitt

Zahlenfolgen mit komplexen Gliedern und Funktionen einer komplexen Veränderlichen

178.	Vorbemerkungen	529
------	--------------------------	-----

Zahlenfolgen und unendliche Reihen mit komplexen Gliedern

179.	Zahlenfolgen mit komplexen Gliedern	530
180.	Punktmengen in der Ebene der komplexen Zahlen. Gebiete und Wege	534
181.	Unendliche Reihen und Produkte mit komplexen Gliedern	536
182.	Potenzreihen, Konvergenzkreis	539

Funktionen einer komplexen Veränderlichen

183.	Funktionen einer komplexen Veränderlichen	539
184.	Grenzwerte von Funktionen	541
185.	Stetigkeit	543
186.	Durch Potenzreihen dargestellte Funktionen	543
187.	Reihen mit veränderlichen Gliedern (Funktionenfolgen)	544

Die elementaren analytischen Funktionen

188.	Polynome. Fundamentalsatz der Algebra	545
189.	Produktdarstellung der ganzen rationalen Funktionen	550
190.	Rationale Funktionen. Teilbruchzerlegung	553
191.	Die Exponentialfunktion	557
192.	Die trigonometrischen Funktionen	560
193.	Die Hyperbelfunktionen	565
194.	Die Logarithmusfunktion	566
195.	Die allgemeine Potenz	568
196.	Die zyklometrischen und die Area-Funktionen	571

Zwölfter Abschnitt

Analytische Funktionen und konforme Abbildung

Grundregeln der Differentialrechnung für Funktionen einer komplexen Veränderlichen

197.	Begriff der Differenzierbarkeit. Analytische Funktionen	574
198.	Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen	577
199.	Die Laplacesche Differentialgleichung	578
200.	Hinreichende Bedingungen für die Differenzierbarkeit	580

Inhaltsverzeichnis

Nr.	Seite
201. Grundregeln der Differentialrechnung	581
202. Differentiation inverser Funktionen	583
203. Differentiation des Logarithmus, der zyklometrischen und der Area-Funktionen	585

Konforme Abbildung

204. Abbildung durch reguläre Funktionen. Konforme Abbildung	588
205. Beispiele	591
206. Abbildung durch ganze lineare Funktionen	597
207. Die Abbildung durch $w = 1/z$. Reziproke Radian	599
208. Der Punkt ∞ (unendlich)	603
209. Spiegelung an einem beliebigen Kreise	604
210. Reziproke Radian im Raume	605
211. Stereographische Projektion. Die Riemannsche Zahlenkugel	608
212. Abbildung durch beliebige lineare Funktionen. Fixpunkte. Doppelverhältnisse	611
Namen- und Sachverzeichnis zum zweiten Bande	616