

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b> .....	<b>13</b>
1.1	Logik, Mengen, Rechenoperationen .....	13
1.1.1	Grundbegriffe der Logik .....	13
1.1.1.1	Aussage und Aussagenform .....	13
1.1.1.2	Aussagenfunktionen .....	14
1.1.1.3	Beweismethoden .....	19
1.1.2	Mengen .....	22
1.1.2.1	Definition und Darstellung von Mengen .....	22
1.1.2.2	Relationen zwischen Mengen .....	23
1.1.2.3	Operationen mit Mengen .....	25
1.1.3	Zahlenbereiche und Rechenoperationen .....	28
1.1.3.1	Zahlenbereiche .....	28
1.1.3.2	Rechenoperationen der ersten und zweiten Stufe .....	30
1.1.3.3	Potenzen und Wurzeln .....	33
1.1.3.4	Logarithmen .....	35
1.1.3.5	Binomischer Satz .....	39
1.2	Gleichungen, Ungleichungen, Beträge .....	42
1.2.1	Allgemeines über Gleichungen .....	42
1.2.2	Arten von Gleichungen .....	44
1.2.3	Absolute Beträge .....	52
1.2.4	Intervalle .....	54
1.2.5	Ungleichungen .....	55
1.3	Funktionen .....	58
1.3.1	Abbildungen .....	58
1.3.2	Allgemeines über Funktionen .....	59
1.3.2.1	Begriff der Funktion .....	59
1.3.2.2	Darstellungsarten von Funktionen .....	60
1.3.2.3	Einteilung und Eigenschaften der Funktionen .....	65
1.3.2.4	Umkehrfunktion .....	68
1.3.2.5	Spezielle Abbildungen .....	70
1.3.3	Spezielle Funktionen .....	71
1.3.3.1	Ganzrationale Funktionen .....	71
1.3.3.2	Gebrochenrationale Funktionen .....	75
1.3.3.3	Wurzelfunktionen .....	76
1.3.3.4	Exponential- und Logarithmusfunktionen .....	77

1.4	Goniometrie und Trigonometrie .....	80
1.4.1	Winkelmaße .....	80
1.4.2	Trigonometrische Funktionen .....	82
1.4.2.1	Definition und Darstellung .....	82
1.4.2.2	Quadrantenrelationen .....	88
1.4.2.3	Zusammenhang zwischen den Funktionswerten eines Winkels ...	89
1.4.2.4	Additionstheoreme .....	91
1.4.2.5	Die allgemeine Sinusfunktion .....	94
1.4.3	Dreiecksberechnung .....	96
1.4.3.1	Rechtwinklige Dreiecke .....	96
1.4.3.2	Berechnung schiefwinkliger Dreiecke .....	101
1.5	Aufgaben .....	108
<b>2</b>	<b>Komplexe Zahlen .....</b>	<b>118</b>
2.1	Imaginäre Zahlen .....	118
2.2	Arithmetische Form komplexer Zahlen .....	119
2.2.1	Definition der komplexen Zahl .....	119
2.2.2	Gaußsche Zahlenebene .....	121
2.2.3	Rechenoperationen der ersten und zweiten Stufe mit komplexen Zahlen .....	122
2.3	Goniometrische Form komplexer Zahlen .....	125
2.3.1	Goniometrische Form .....	125
2.3.2	Multiplikation und Division .....	127
2.3.3	Potenzieren und Radizieren .....	130
2.3.4	Binomische Gleichungen .....	132
2.4	Exponentialform komplexer Zahlen .....	134
2.4.1	Exponentialform .....	134
2.4.2	Multiplikation und Division .....	135
2.4.3	Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren .....	136
2.5	Komplexe Funktionen einer reellen Variablen, Ortskurven .....	137
2.5.1	Komplexe Funktionen einer reellen Variablen .....	137
2.5.2	Ortskurven und ihre Inversion .....	140
2.6	Aufgaben .....	148
<b>3</b>	<b>Vektorrechnung und analytische Geometrie .....</b>	<b>150</b>
3.1	Koordinaten .....	150
3.2	Vektoralgebra .....	154
3.2.1	Vektorbegriff .....	154
3.2.2	Addition und Subtraktion von Vektoren .....	155
3.2.3	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar .....	157
3.2.4	Darstellung von Vektoren im Koordinatensystem .....	159
3.2.5	Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit .....	162
3.2.6	Skalarprodukt .....	164

3.2.7	Vektorprodukt .....	167
3.2.8	Mehrfache Produkte von Vektoren .....	169
3.3	Analytische Geometrie der Ebene .....	171
3.3.1	Kurvengleichungen .....	171
3.3.2	Die Gerade .....	174
3.3.3	Kreis .....	178
3.3.4	Parabel .....	181
3.3.5	Ellipse .....	185
3.3.6	Hyperbel .....	189
3.3.7	Ergänzungen zu den Kegelschnitten .....	192
3.4	Analytische Geometrie des Raumes .....	194
3.4.1	Gerade .....	194
3.4.2	Ebene .....	199
3.4.3	Flächen 2.Ordnung .....	207
3.5	Aufgaben .....	211
<b>4</b>	<b>Lineare Algebra .....</b>	<b>220</b>
4.1	Systeme linearer Funktionen und Gleichungen .....	220
4.1.1	Einführung .....	220
4.1.2	Umformung linearer Gleichungssysteme .....	222
4.1.2.1	Austauschverfahren .....	222
4.1.2.2	Gaußscher Algorithmus .....	226
4.2	Linearer Vektorraum .....	229
4.2.1	Grundlagen .....	229
4.2.2	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren .....	232
4.3	Matrizen .....	238
4.3.1	Matrizenbegriff .....	238
4.3.2	Addition und Subtraktion von Matrizen .....	242
4.3.3	Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl .....	244
4.3.4	Matrizenmultiplikation .....	245
4.3.5	Lineare Abbildung .....	251
4.3.6	Matrizeninversion .....	252
4.3.7	Matrizengleichungen .....	254
4.3.8	Blockmatrizen .....	255
4.4	Determinanten .....	257
4.4.1	Definition und Berechnung von Determinanten .....	257
4.4.2	Eigenschaften von Determinanten .....	262
4.4.3	Ausgewählte Anwendungen .....	267
4.4.3.1	Cramersche Regel .....	267
4.4.3.2	Berechnung der inversen Matrix .....	268
4.4.3.3	Vektoriell Produkt zweier Vektoren .....	270
4.4.3.4	Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte .....	271
4.5	Theorie der Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme .....	272
4.5.1	Rang einer Matrix .....	272

4.5.2	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme .....	275
4.5.2.1	Grundlagen .....	275
4.5.2.2	Inhomogene lineare Gleichungssysteme .....	277
4.5.2.3	Homogene lineare Gleichungssysteme .....	278
4.5.3	Allgemeine Lösung .....	279
4.6	Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme .....	282
4.6.1	Auswahl eines Lösungsverfahrens .....	282
4.6.2	Konditionierungsprobleme .....	283
4.7	Anwendungen der linearen Algebra .....	285
4.7.1	Matrizeneigenwertprobleme .....	285
4.7.2	Verflechtungsbilanzen in der Betriebswirtschaft .....	290
4.8	Aufgaben .....	295
<b>5</b>	<b>Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen .....</b>	<b>298</b>
5.1	Folgen, Reihen, Grenzwerte .....	298
5.1.1	Grenzwerte von Folgen .....	298
5.1.1.1	Begriff der Zahlenfolge .....	298
5.1.1.2	Spezielle Zahlenfolgen .....	304
5.1.1.3	Grenzwert einer Folge .....	308
5.1.1.4	Grenzwertsätze .....	313
5.1.1.5	Geometrische Folgen und Reihen .....	316
5.1.1.6	Die Eulersche Zahl $e$ als Grenzwert von Folgen .....	322
5.1.1.7	Wurzelfunktionen und Berechnung von Wurzeln .....	325
5.1.2	Grenzwerte von Funktionen .....	331
5.1.2.1	Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow x_0$ .....	331
5.1.2.2	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$ .....	338
5.1.3	Stetigkeit von Funktionen .....	340
5.1.3.1	Begriff der Stetigkeit .....	340
5.1.3.2	Unstetigkeitsstellen und Lücken .....	341
5.2	Ableitung einer Funktion .....	344
5.2.1	Begriff der Ableitung .....	344
5.2.2	Bedeutung der Tangente .....	346
5.2.3	Differential und Differentialquotient .....	349
5.2.4	Differenzierbarkeit und Stetigkeit .....	350
5.2.5	Differentiationsregeln .....	351
5.2.5.1	Faktorregel .....	351
5.2.5.2	Summenregel .....	352
5.2.5.3	Produktregel .....	352
5.2.5.4	Quotientenregel .....	353
5.2.5.5	Ableitung der Umkehrfunktion .....	354
5.2.5.6	Kettenregel: Ableitung zusammengesetzter Funktionen .....	356
5.2.6	Ableitungen von Grundfunktionen .....	358
5.2.6.1	Trigonometrische Funktionen .....	359

5.2.6.2	Zyklometrische Funktionen oder Arcusfunktionen.....	360
5.2.6.3	Logarithmusfunktionen .....	363
5.2.6.4	Exponentialfunktionen .....	365
5.2.6.5	Potenzfunktionen mit beliebigen Exponenten .....	366
5.2.6.6	Hyperbelfunktionen .....	366
5.2.6.7	Areafunktionen .....	368
5.2.7	Extremwerte und Mittelwertsätze der Differentialrechnung.....	370
5.2.7.1	Extremwerte von Funktionen.....	371
5.2.7.2	Mittelwertsätze der Differentialrechnung.....	373
5.2.8	Regel von Bernoulli und de l'Hospital .....	376
5.2.9	Extrem- und Wendepunkte.....	380
5.2.9.1	Monotonie- und Krümmungsverhalten.....	380
5.2.9.2	Extrempunkte.....	385
5.2.9.3	Wendepunkte.....	388
5.2.10	Kurvendiskussionen .....	391
5.2.10.1	Checkliste .....	391
5.2.10.2	Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen).....	392
5.2.10.3	Gebrochenrationale Funktionen .....	398
5.2.10.4	Exponentialfunktionen .....	403
5.2.10.5	Trigonometrische Funktionen.....	408
5.2.11	Extremwertprobleme.....	414
5.2.12	Bestimmung von Nullstellen: Iterationsverfahren nach Newton.....	417
5.3	Aufgaben.....	421
<b>6</b>	<b>Integralrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen .....</b>	<b>432</b>
6.1	Integralbegriff und Integrierbarkeit.....	432
6.1.1	Unbestimmtes Integral.....	432
6.1.2	Bestimmtes Integral.....	438
6.1.3	Eigenschaften integrierbarer Funktionen.....	440
6.1.4	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung .....	444
6.1.5	Uneigentliche Integrale.....	451
6.2	Integrationsverfahren .....	453
6.2.1	Vorbemerkungen.....	453
6.2.2	Integration durch Substitution .....	454
6.2.2.1	Allgemeines Prinzip des Verfahrens .....	454
6.2.2.2	Integrale der Form $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ .....	456
6.2.2.3	Substitution durch trigonometrische und hyperbolische Funktionen .....	462
6.2.2.4	Integrale der Form $\int R(\sin x; \cos x; \tan x; \cot x) dx$ .....	464
6.2.3	Partielle Integration .....	465
6.2.4	Integration nach Partialbruchzerlegung .....	469
6.2.4.1	Vorbemerkungen .....	469

6.2.4.2	Nenner mit nur einfachen reellen Nullstellen .....	471
6.2.4.3	Nenner mit mehrfachen reellen Nullstellen .....	472
6.2.4.4	Nenner mit einfachen komplexen Nullstellen .....	474
6.2.4.5	Nenner mit mehrfachen komplexen Nullstellen .....	475
6.2.5	Gebrauch von Integraltafeln .....	477
6.2.6	Numerische Integration .....	478
6.3	Anwendungen der Integralrechnung aus der Geometrie .....	484
6.3.1	Flächeninhalte .....	484
6.3.1.1	Flächen zwischen einer Kurve und der $x$ -Achse .....	484
6.3.1.2	Flächen zwischen zwei Kurven .....	488
6.3.1.3	Betrachtungen zum Flächenelement .....	490
6.3.2	Rauminhalt von Rotationskörpern .....	492
6.3.3	Bogenlängen .....	495
6.3.4	Mantelflächen .....	497
6.4	Anwendungen der Integralrechnung aus anderen Gebieten .....	499
6.4.1	Statisches Moment und Schwerpunkt .....	499
6.4.1.1	Vorbemerkungen .....	499
6.4.1.2	Statische Momente und Schwerpunkt einer ebenen Fläche .....	500
6.4.1.3	Statische Momente und Schwerpunkt eines Körpers .....	503
6.4.1.4	Statische Momente und Schwerpunkt eines ebenen Kurvenstücks .....	504
6.4.1.5	Guldinsche Regeln .....	505
6.4.2	Trägheitsmomente .....	507
6.4.3	Balken auf zwei Stützen mit ungleichmäßig verteilter Streckenlast .....	511
6.4.4	Arbeit .....	514
6.4.4.1	Arbeit bei der Ausdehnung einer Schraubenfeder .....	514
6.4.4.2	Ausdehnungsarbeit eines Gases .....	515
6.4.4.3	Arbeit des Wechselstroms .....	516
6.4.5	Berechnung von Mittelwerten mit Hilfe des bestimmten Integrals .....	517
6.4.5.1	Linearer Mittelwert .....	517
6.4.5.2	Quadratischer Mittelwert .....	519
6.5	Aufgaben .....	520
	Lösungen .....	526
	Integraltafel .....	571
	Sachwortverzeichnis .....	575