

# Inhaltsverzeichnis

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Vorwort</b>  | <b>V</b>    |
| <b>Notationen</b>   | <b>XIII</b> |
| <b>1 Aussagenlogik</b>                                    | <b>1</b>    |
| 1.1 Boolesche Funktionen und Formeln . . . . .            | 2           |
| 1.2 Semantische Äquivalenz und Normalformen . . . . .     | 9           |
| 1.3 Tautologien und aussagenlogisches Folgern . . . . .   | 14          |
| 1.4 Ein vollständiger Kalkül für das Folgern . . . . .    | 18          |
| 1.5 Anwendungen des Kompaktheitssatzes . . . . .          | 25          |
| 1.6 Hilbert-Kalküle . . . . .                             | 29          |
| <b>2 Prädikatenlogik</b>                                  | <b>33</b>   |
| 2.1 Mathematische Strukturen . . . . .                    | 34          |
| 2.2 Syntax elementarer Sprachen . . . . .                 | 43          |
| 2.3 Semantik elementarer Sprachen . . . . .               | 49          |
| 2.4 Allgemeingültigkeit und logische Äquivalenz . . . . . | 58          |
| 2.5 Logisches Folgern und der Theoriebegriff . . . . .    | 62          |
| 2.6 Spracherweiterungen . . . . .                         | 67          |
| <b>3 Der Gödelsche Vollständigkeitssatz</b>               | <b>71</b>   |
| 3.1 Ein Kalkül des natürlichen Schließens . . . . .       | 72          |
| 3.2 Der Vollständigkeitsbeweis . . . . .                  | 76          |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.3      | Erste Anwendungen – Nichtstandardmodelle . . . . .         | 81         |
| 3.4      | ZFC und die Paradoxie von Skolem . . . . .                 | 87         |
| 3.5      | Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit . . . . .              | 92         |
| 3.6      | Vollständige Hilbert-Kalküle . . . . .                     | 95         |
| 3.7      | Fragmente der 1. Stufe und Erweiterungen . . . . .         | 99         |
| <b>4</b> | <b>Grundlagen der Logikprogrammierung</b>                  | <b>105</b> |
| 4.1      | Termmodelle und der Satz von Herbrand . . . . .            | 106        |
| 4.2      | Aussagenlogische Resolution . . . . .                      | 112        |
| 4.3      | Unifikation . . . . .                                      | 119        |
| 4.4      | Logikprogrammierung . . . . .                              | 122        |
| 4.5      | Der Beweis des Hauptsatzes . . . . .                       | 129        |
| <b>5</b> | <b>Elemente der Modelltheorie</b>                          | <b>131</b> |
| 5.1      | Elementare Erweiterungen . . . . .                         | 132        |
| 5.2      | Vollständige und $\kappa$ -kategorische Theorien . . . . . | 137        |
| 5.3      | Das Ehrenfeucht-Spiel . . . . .                            | 142        |
| 5.4      | Einbettungs- und Charakterisierungssätze . . . . .         | 145        |
| 5.5      | Modellvollständigkeit . . . . .                            | 151        |
| 5.6      | Quantorenelimination . . . . .                             | 157        |
| 5.7      | Reduzierte Produkte und Ultraprodukte . . . . .            | 163        |
| <b>6</b> | <b>Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit</b>            | <b>167</b> |
| 6.1      | Rekursive und primitiv-rekursive Funktionen . . . . .      | 169        |
| 6.2      | Gödelisierung . . . . .                                    | 176        |
| 6.3      | Repräsentierbarkeit arithmetischer Prädikate . . . . .     | 182        |
| 6.4      | Der Repräsentationssatz . . . . .                          | 189        |
| 6.5      | Die Sätze von Gödel, Tarski, Church . . . . .              | 194        |
| 6.6      | Übertragung durch Interpretation . . . . .                 | 200        |
| 6.7      | Die arithmetische Hierarchie . . . . .                     | 205        |

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>7 Zur Theorie der Selbstreferenz</b>            | <b>209</b> |
| 7.1 Die Ableitungsbedingungen . . . . .            | 210        |
| 7.2 Die Theoreme von Gödel und Löb . . . . .       | 217        |
| 7.3 Die Modallogik G . . . . .                     | 221        |
| 7.4 Modale Behandlung der Selbstreferenz . . . . . | 223        |
| 7.5 Eine bimodale Beweislogik für PA . . . . .     | 226        |
| 7.6 Modale Operatoren in ZFC . . . . .             | 228        |
| <br>   |            |
| <b>Lösungshinweise zu den Übungen</b>              | <b>231</b> |
| <br>   |            |
| <b>Literatur</b>                                   | <b>241</b> |
| <br>   |            |
| <b>Stichwortverzeichnis</b>                        | <b>247</b> |
| <br>   |            |
| <b>Symbolverzeichnis</b>                           | <b>255</b> |