

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	9
Bibliographie commentée	11
CHAPITRE I : Mathématiques et mathématiciens	15
1. La conception des mathématiques	15
2. La vie des mathématiciens	17
3. Le travail des mathématiciens et la communauté mathématique	21
4. Maîtres et écoles	23
CHAPITRE II : La nature des problèmes des mathématiques	29
1. Mathématiques « pures » et mathématiques « appliquées »	29
2. Physique théorique et mathématique	31
3. Les applications des mathématiques à l'époque classique	32
4. Les attaques utilitaristes	36
5. Les dogmes à la mode	37
6. Conclusions	39
CHAPITRE III : Objets et méthodes des mathématiques classiques	41
1. La naissance des notions pré-mathématiques	43
2. L'idée de démonstration	46
3. Axiomes et définitions	48
4. La géométrie, d'Euclide à Hilbert	50
5. Nombres et grandeurs	54
6. L'idée d'approximation	59
7. L'évolution de l'algèbre	62

8. La méthode des coordonnées	64
9. La notion de limite et le calcul infinitésimal	70
Appendice I. Le calcul des rapports dans le Livre V d'Euclide	78
Appendice II. La théorie axiomatique des nombres réels ..	79
Appendice III. L'approximation des racines réelles d'un polynôme	81
Appendice IV. Les raisonnements par « exhaustion »	83
Appendice V. Applications des algorithmes élémentaires du calcul intégral	85
CHAPITRE IV : Quelques problèmes des mathématiques classiques	89
1. Les problèmes intraitables et les problèmes stériles ..	90
A. Les nombres parfaits	90
B. Les nombres de Fermat	91
C. Le problème des quatre couleurs	91
D. Les problèmes de géométrie élémentaire	93
2. Les problèmes prolifiques	94
A. Les sommes de carrés	94
B. Les propriétés des nombres premiers	99
C. Les débuts de la géométrie algébrique	104
Appendice I. Les nombres premiers de la forme $4k - 1$ ou $6k - 1$	105
Appendice II. La décomposition de $\zeta(s)$ en produit eulérien	105
Appendice III. La méthode de Lagrange pour la résolution de $ax^2 + bxy + cy^2 = n$ en nombres entiers	107
Appendice IV. Nombres de Bernoulli et fonction zêta	109
CHAPITRE V : Nouveaux objets et nouvelles méthodes	113
1. Les nouveaux calculs	115
A. Les nombres complexes	115
B. Les vecteurs	119
C. Le calcul algébrique sur les fonctions	122
D. Permutations et substitutions	123
E. Déplacements et affinités	127
F. Le calcul des congruences de nombres entiers	129
G. Le calcul des classes de formes quadratiques	130
2. Les premières structures	131
A. Les principales propriétés des lois de composition	131
B. Les groupes de transformations	134
C. Les groupes « abstraits »	138
D. Quaternions et algèbres	139
3. Le langage ensembliste et les structures générales	143
A. La notion d'ensemble	143

B. Le langage ensembliste	144
C. Structures algébriques	146
C I) Groupes	146
C II) Anneaux	147
C III) Corps	148
C IV) Anneaux et corps non commutatifs	149
D. Structures d'ordre	150
E. Espaces métriques et notions topologiques	151
F. Superposition et dissociation des structures	153
4. Isomorphismes et classifications	157
A. Isomorphismes	157
B. Les problèmes de classification	160
C. Les inventions de foncteurs et de structures	162
5. Les mathématiques actuelles	164
A. Un panorama des mathématiques	164
B. Spécialistes et généralistes	173
C. L'évolution des théories mathématiques	174
6. Intuition et structures	176
Appendice I. La résolution de l'équation du 4 ^e degré	181
Appendice II. Compléments sur les groupes et sur la résolution des équations algébriques	181
A. Le groupe symétrique S_n	181
B. Le groupe de Galois d'une équation	182
C. Groupes de Galois et groupes d'automorphismes ..	183
D. Sous-groupes distingués et groupes simples	184
E. Les rotations du cube	185
Appendice III. Compléments sur les anneaux et les corps	187
A. Les congruences modulo un nombre premier	187
B. L'anneau $Z[i]$ des entiers de Gauss	188
C. Les congruences modulo un polynôme	191
D. Les corps de fonctions algébriques	193
E. Remarques sur les corps ordonnés	194
Appendice IV. Exemples de distances	196
A. Distances sur l'espace des fonctions continues	196
B. Les espaces préhilbertiens	199
C. L'espace de Hilbert	201
D. Les distances p -adiques	202
Appendice V. Les séries de Fourier	203
A. Séries trigonométriques et coefficients de Fourier	203
B. Convergence de la série de Fourier	205
C. Séries de Fourier des polynômes de Bernoulli	209
D. Les problèmes de Cantor	209

CHAPITRE VI : Problèmes et pseudo-problèmes des « fondements »	211
1. Les géométries non euclidiennes	212
A. Le postulat des parallèles	212
B. La géométrie sur une surface	215
C. Les modèles des géométries non euclidiennes	217
2. L'approfondissement de la notion de nombre	223
A. Les nombres irrationnels	223
B. Les monstres	224
C. L'axiomatisation de l'arithmétique	226
3. Les ensembles infinis	228
A. Ensembles infinis et entiers naturels	228
B. La comparaison des ensembles infinis	230
4. Les « paradoxes » et leurs conséquences	233
A. Existence et constructions	233
B. Les avatars de la notion d'ensemble et l'axiome du choix	234
C. Les paradoxes et la formalisation	237
5. L'essor de la logique mathématique	239
A. La formalisation de la logique	239
B. La métamathématique	240
C. Les triomphes de la logique mathématique	242
D. Les réactions des mathématiciens	244
E. Les rapports des mathématiques et de la logique ..	246
6. La notion de « démonstration rigoureuse »	247
Appendice I. La géométrie sur une surface	251
A. Les courbes gauches	251
B. Les courbes sur une surface	251
C. Le demi-plan de Poincaré	253
Appendice II. Les modèles des nombres réels	256
A. La théorie des nombres rationnels	256
B. Le modèle de Dedekind (exposé simplifié)	257
C. Le modèle de Méray-Cantor (exposé simplifié)	257
Appendice III. Les théorèmes de Cantor et de son école	258
A. L'ensemble \mathbf{R} des nombres réels n'est pas dénombrable	258
B. La relation d'ordre entre cardinaux	259
C. L'équipotence de \mathbf{R} et $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$	260
D. Le cardinal d'un ensemble de parties	262
NOTATIONS COURANTES	265
INDEX HISTORIQUE	267
INDEX TERMINOLOGIQUE	289