

Table des matières

TOME 1

| | |
|---|---|
| INTRODUCTION. ORIGINALITÉ DE LA LOGIQUE MODERNE | 1 |
|---|---|

PREMIÈRE PARTIE

LES CLASSES

| | |
|---|----|
| CHAPITRE I. LOGIQUE DES CLASSES | 15 |
| <i>Section 1. Classe, ensemble et prédicat</i> | 15 |
| A. <i>Classe, ensemble et prédicat</i> | 15 |
| 1. Logique et mathématique | 15 |
| 2. Classe et prédicat | 16 |
| B. <i>Egalité et inclusion des classes</i> | 17 |
| 1. Egalité des classes | 17 |
| 2. Inclusion des classes | 18 |
| 3. Egalité et inclusion | 18 |
| 4. Inclusion et appartenance | 18 |
| C. <i>Propriétés de l'égalité, de l'inclusion et de l'appartenance</i> | 19 |
| 1. Propriétés de la relation d'égalité entre deux classes α et β | 19 |
| 2. Propriétés de la relation d'inclusion \subseteq | 19 |
| 3. Propriétés de la relation d'appartenance | 20 |
| <i>Section 2. Le calcul des classes</i> | 20 |
| A. <i>La réunion</i> | 21 |
| 1. Définition | 21 |
| 2. Propriétés de la réunion | 22 |
| 3. Réunion et inclusion | 22 |
| B. <i>L'intersection</i> | 22 |
| 1. Définition | 22 |

| | |
|--|----|
| 2. Propriétés de l'intersection | 23 |
| 3. La classe vide | 23 |
| 4. Intersection et inclusion | 23 |
| 5. Intersection et réunion | 23 |
| C. <i>La complémentation</i> | 24 |
| 1. Définition | 24 |
| 2. Propriétés de la complémentation | 24 |
| 3. Complémentation et inclusion | 24 |
| 4. Complémentation et réunion exclusive | 25 |
| 5. Univers du discours et complément | 25 |
| D. <i>Les propriétés de \emptyset et de \mathcal{U}</i> | 25 |
| 1. Nouvelle définition de la classe vide | 25 |
| 2. Intersection et classe vide | 25 |
| 3. Inclusion et classe vide | 26 |
| 4. Relations de l'Univers du discours et de la classe vide | 26 |
| CHAPITRE II. FORMALISATION DE LA LOGIQUE DES CLASSES | 27 |
| <i>Section 1. Axiomatisation, formalisation et propriétés des systèmes formels</i> | 27 |
| A. <i>L'axiomatisation</i> | 28 |
| 1. L'axiomatisation au sens classique | 28 |
| 2. L'axiomatisation au sens moderne | 30 |
| B. <i>La formalisation</i> | 30 |
| 1. Notion de système formel | 30 |
| 2. Construction d'un système formel | 31 |
| 3. Syntaxe et sémantique | 32 |
| C. <i>Propriétés des systèmes formels</i> | 33 |
| 1. Effectivité | 33 |
| 2. Consistance | 34 |
| 3. Complétude | 35 |
| 4. Saturation | 35 |
| 5. Décidabilité | 35 |
| 6. Indépendance | 35 |
| 7. Force | 36 |
| 8. Consistance relative | 36 |
| <i>Section 2. Formalisation du calcul des classes</i> | 36 |
| 1. Les signes, éléments de l'alphabet | 36 |
| 2. Les termes ou mots | 37 |
| 3. Les formules ou expressions bien formées (<i>ebf</i>) | 38 |
| 4. Les axiomes | 38 |
| 5. Les règles de conséquence immédiate | 38 |
| 6. Déduction et théorème | 39 |
| 7. Interprétation du calcul des classes | 40 |

DEUXIÈME PARTIE

LES PROPOSITIONS

| | |
|---|----|
| CHAPITRE III. LOGIQUE DES PROPOSITIONS | 45 |
| Section 1. Logique des propositions et évaluation des propositions composées | 45 |
| A. Propositions simples et propositions composées | 46 |
| 1. Définition du calcul des propositions | 46 |
| 2. Propositions simples ou atomiques | 46 |
| 3. Propositions composées | 46 |
| B. Evaluation des propositions composées par les tables de vérité | 47 |
| 1. La table de vérité du OU non exclusif (le <i>vel</i> latin) ou disjonction | 47 |
| 2. La table de vérité du OU exclusif (le <i>aut</i> latin) ou alternative | 48 |
| 3. La table de vérité du ET ou conjonction | 48 |
| 4. La table de vérité du NON ou négation | 49 |
| 5. La table de vérité du SI... ALORS ou conditionnel | 49 |
| 6. Les différentes notations des symboles | 50 |
| 7. Evaluation des propositions composées par les tables de vérité | 52 |
| C. Vérification des arguments par les tables de vérité | 54 |
| 1. Définition | 54 |
| 2. Exemples | 54 |
| D. Relations entre deux propositions | 56 |
| 1. Propositions sans relation | 57 |
| 2. Relations simples entre les propositions | 57 |
| 3. Relations doubles entre les propositions | 57 |
| Section 2. Equivalence des formules et tautologie | 58 |
| A. Biconditionnel, équivalence et tautologie | 58 |
| 1. L'opérateur biconditionnel | 58 |
| 2. L'équivalence des formules | 59 |
| 3. La tautologie | 60 |
| 4. Les différentes expressions bien formées | 62 |
| B. Les 16 opérateurs binaires | 63 |
| 1. Le tableau des 16 opérateurs binaires | 63 |
| 2. L'équivalence des opérateurs | 65 |
| 3. Etablir une formule ayant une évaluation donnée | 65 |
| 4. Trois équivalences utiles | 66 |
| 5. Autres équivalences utiles | 67 |
| Section 3. Le problème de la décision et les formes normales | 68 |
| A. Notation des sommes et des produits logiques et de leurs propriétés | 68 |
| 1. Somme logique | 68 |
| 2. Produit logique | 69 |
| 3. Principe de dualité | 69 |

| | |
|---|----|
| 4. Distributivité de la conjonction et de la disjonction | 71 |
| B. Les formes normales | 72 |
| 1. Forme normale disjonctive | 72 |
| 2. Forme normale conjonctive | 73 |
| 3. Problème de la décision | 74 |
| 4. Forme normale disjonctive parfaite | 74 |
| 5. Forme normale conjonctive parfaite | 75 |
| 6. Equivalence des formules | 76 |
| C. Quelques lois importantes du calcul des propositions | 77 |
| Section 4. L'isomorphisme des classes et des propositions | 79 |
| A. Analogies des classes et des propositions | 79 |
| 1. Classes, propositions et opérateurs | 79 |
| 2. Analogies entre les relations et les règles | 81 |
| B. Logique et ensembles | 81 |
| 1. La conjonction | 82 |
| 2. La disjonction | 82 |
| 3. La négation | 82 |
| 4. Le conditionnel | 83 |
| 5. Le biconditionnel | 84 |
| 6. Remarques | 84 |
| C. Limites de l'isomorphisme des classes et des propositions | 85 |
| 1. Le calcul des classes déborde celui des propositions | 85 |
| 2. Le calcul des propositions domine le calcul des classes | 85 |
| 3. Limites de la logique des propositions | 86 |
| CHAPITRE IV. FORMALISATION DE LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS | 88 |
| Section 1. La formalisation du calcul des propositions | 88 |
| A. Symboles et formules | 89 |
| 1. Les symboles ou signes primitifs | 89 |
| 2. Les formules ou expressions bien formées (<i>ebf</i>) | 90 |
| B. Les axiomes de Russell | 91 |
| 1. Les cinq axiomes de Whitehead et Russell (1910) | 92 |
| 2. Les quatre axiomes de Hilbert-Ackermann (1928) | 92 |
| 3. Les règles | 93 |
| 4. Les définitions et les règles dérivées | 93 |
| 5. Démonstration de quelques théorèmes | 94 |
| C. Les trois axiomes de Lukasiewicz (1930) | 97 |
| 1. Enoncé des axiomes | 97 |
| 2. Les règles | 97 |

| | |
|---|-----|
| 3. Les définitions abrégées | 97 |
| 4. Les théorèmes | 98 |
| D. <i>Les onze axiomes de Novikov</i> | 99 |
| 1. Axiomes du calcul des propositions | 99 |
| 2. Les règles | 100 |
| 3. La formule abrégée | 101 |
| 4. Quelques théorèmes utiles | 102 |
| 5. Les treize axiomes de Kleene-Gentzen (1934-35) | 102 |
| Section 2. La déduction et l'équivalence | 103 |
| A. <i>Théorème de déduction</i> | 103 |
| 1. Définition de la déduction | 103 |
| 2. Le théorème de déduction | 104 |
| 3. Exemple d'application | 108 |
| B. <i>Théorèmes et règles du calcul des propositions</i> | 108 |
| 1. Règle du syllogisme ou de la transitivité | 109 |
| 2. Règle de permutation des prémisses | 109 |
| 3. Règle de symétrie | 110 |
| 4. Théorème <i>Ex falso sequitur quodlibet</i> | 111 |
| 5. Règle de réunion des prémisses | 112 |
| 6. Principe de non-contradiction | 113 |
| C. <i>Equivalence des formules et théorèmes sur l'équivalence</i> | 114 |
| 1. Equivalence des formules | 114 |
| 2. Démonstration de l'équivalence de deux formules | 114 |
| 3. Théorème d'équivalence | 115 |
| 4. Quelques théorèmes sur l'équivalence | 116 |
| Section 3. Interprétation et propriétés du calcul des propositions | 119 |
| 1. Algèbre des propositions et calcul des propositions | 120 |
| 2. Non-contradiction du calcul des propositions | 123 |
| 3. Complétude du calcul des propositions | 124 |
| 4. Indépendance des axiomes du calcul des propositions | 127 |
| CHAPITRE V. LA DÉDUCTION NATURELLE DES PROPOSITIONS | 135 |
| <i>Section unique</i> | 135 |
| 1. Généralités | 135 |
| 2. Les symboles ou signes primitifs | 136 |
| 3. Les formules ou expressions bien formées | 137 |
| 4. Le schéma d'axiomes | 138 |
| 5. Les règles ou schémas de dérivation | 138 |
| 6. Démonstration de quelques théorèmes | 141 |
| 7. Avantages de la méthode de déduction naturelle | 144 |

TROISIÈME PARTIE

LES PRÉDICATS

| | |
|---|-----|
| CHAPITRE VI. LOGIQUE DES PRÉDICATS..... | 149 |
| <i>Section 1. Structure des propositions</i> | 149 |
| A. <i>Structure élémentaire des propositions</i> | 150 |
| 1. Le point de vue de la logique classique | 150 |
| 2. Le point de vue de la logique moderne | 151 |
| B. <i>Structure des propositions avec quantificateurs</i> | 154 |
| 1. Le point de vue de la logique classique | 154 |
| 2. Le point de vue de la logique moderne | 155 |
| 3. Les opérateurs de la logique des prédicats | 158 |
| <i>Section 2. Quantification des propositions et propriétés des quantificateurs</i> | 158 |
| A. <i>Quantification des propositions</i> | 158 |
| 1. Propositions simples | 159 |
| 2. Propositions composées | 160 |
| B. <i>Propriétés des quantificateurs</i> | 160 |
| 1. Variables libres et variables liées | 160 |
| 2. Quantificateurs et domaines de définition | 162 |
| 3. Principales propriétés des quantificateurs | 164 |
| 4. Propriétés des propositions quantifiées d'ordre deux | 167 |
| 5. Quelques procédés mnémotechniques | 172 |
| <i>Section 3. Vers la formalisation des prédicats</i> | 173 |
| A. <i>Prédicats et ensembles</i> | 174 |
| 1. Prédicat, classe et ensemble | 174 |
| 2. Définitions relatives aux fonctions propositionnelles d'une variable | 175 |
| 3. Quelques définitions relatives aux formules | 176 |
| B. <i>Abstracteurs, généralisateurs et quantificateurs</i> | 178 |
| 1. Les abstracteurs | 178 |
| 2. Les généralisateurs | 180 |
| 3. Les quantificateurs | 181 |
| C. <i>Formes normales</i> | 181 |
| 1. Forme réduite | 181 |
| 2. Forme normale | 182 |

| | |
|--|-----|
| D. <i>Limites de la logique des prédicats</i> | 185 |
| 1. Prédicats d'une variable | 185 |
| 2. Domaines finis et domaines infinis | 187 |
| 3. Théorème de Löwenheim | 188 |
| CHAPITRE VII. FORMALISATION DE LA LOGIQUE DES PRÉ- DICATS | 191 |
| <i>Section 1. Axiomatisation de la logique des prédicats</i> | 191 |
| A. <i>Les systèmes d'axiomes</i> | 192 |
| 1. L'alphabet | 192 |
| 2. Les formules | 193 |
| 3. Les axiomes de Hilbert-Ackermann | 194 |
| 4. Les axiomes de Lukasiewicz | 195 |
| 5. Les axiomes de Novikov | 195 |
| B. <i>Les cinq règles de formation des formules vraies</i> | 196 |
| 1. Règle de conclusion | 196 |
| 2. Règle de substitution des propositions et des fonctions pré- dicatives | 196 |
| 3. Règle de substitution d'une variable d'objet libre | 198 |
| 4. Règle du changement de nom des variables d'objet liées | 199 |
| 5. Règles de liaison par quantificateur | 200 |
| 6. Remarques | 200 |
| <i>Section 2. Théorèmes du calcul des prédicats</i> | 201 |
| A. <i>Le théorème de déduction</i> | 201 |
| 1. Formules vraies ou déduites dans le calcul des prédicats.... | 201 |
| 2. Déduction dans le calcul des prédicats | 203 |
| 3. Théorème de déduction | 204 |
| B. <i>Théorèmes du calcul des prédicats</i> | 206 |
| 1. Théorème 1 : Existentialisation des propositions universelles.. | 206 |
| 2. Théorème 2 : Commutativité des quantificateurs universels.. | 207 |
| 3. Théorème 3 : Subordination des existentielles universalisées aux universelles existentialisées | 207 |
| 4. Théorème 4 : Semi-distributivité du quantificateur universel (formule [43] du tableau VI.2) | 208 |
| 5. Théorème 5 : Semi-distributivité du quantificateur universel (formule [46] du tableau VI.2) | 209 |
| 6. Théorème 6 : Semi-distributivité du quantificateur universel (formule [52] du tableau VI.2) | 210 |
| 7. Théorème 7 : Semi-distributivité du quantificateur universel (formule [54] du tableau VI.2) | 211 |
| 8. Théorème 8 : Négation des quantificateurs | 212 |
| 9. Théorème 9 : Distributivité du quantificateur universel (for- mule [45] du tableau VI.2)..... | 213 |

| | | |
|-------------------|---|-----|
| C. | <i>Équivalence et dualité des formules</i> | 215 |
| 1. | Définition des formules équivalentes | 215 |
| 2. | Théorème d'équivalence et règle de remplacement | 215 |
| 3. | Formules réduites | 217 |
| 4. | Formules duales | 217 |
| Section 3. | Les formes normales du calcul des prédicats | 218 |
| A. | <i>Les formes normales</i> | 219 |
| 1. | Rappel de la définition | 219 |
| 2. | Théorèmes | 219 |
| 3. | Existence des formes normales | 221 |
| B. | <i>L'équivalence déductive et les formes normales de Skolem</i> | 221 |
| 1. | L'équivalence déductive | 221 |
| 2. | Le théorème de Skolem | 222 |
| 3. | Lemmes préparatoires | 223 |
| 4. | Démonstration du théorème de Skolem | 227 |
| Section 4. | Les propriétés du calcul des prédicats | 229 |
| A. | <i>Non-contradiction du calcul des prédicats</i> | 229 |
| 1. | Notion de formule associée | 229 |
| 2. | Démonstration générale | 229 |
| 3. | Démonstration formelle | 230 |
| B. | <i>Complétude au sens fort ou étroit</i> | 232 |
| 1. | Adjonction d'une formule non démontrable | 232 |
| 2. | Éléments de démonstration | 233 |
| C. | <i>Complétude au sens faible ou large</i> | 235 |
| D. | <i>Métalogique des prédicats</i> | 235 |
| 1. | Logique du premier ordre et logiques d'ordre supérieur | 236 |
| 2. | Non-contradiction et décidabilité du calcul des prédicats du premier ordre | 236 |
| 3. | Les théorèmes de Gödel | 237 |
| Section 5. | La déduction naturelle des prédicats | 238 |
| 1. | Axiomes et règles de la déduction naturelle | 238 |
| 2. | Théorèmes | 239 |
| ANNEXE I. | Table de correspondance des différents symboles employés dans les traités de logique | 243 |
| ANNEXE II. | Quelques systèmes d'axiomes pour la logique des propositions | 244 |
| EXERCICES | | |
| 1. | <i>Énoncés des exercices</i> | 253 |
| 2. | <i>Corrigés des exercices</i> | 262 |

TOME 2

QUATRIÈME PARTIE

APERÇUS SUR LES LOGIQUES NON CLASSIQUES

| | |
|--|-----|
| CHAPITRE VIII. LOGIQUES PLURIVALENTES..... | 297 |
| Section 1. La logique trivalente de Lukasiewicz | 298 |
| 1. Tables de vérité des cinq opérateurs fondamentaux | 299 |
| 2. Les axiomes..... | 302 |
| 3. Calcul trivalent et calcul classique | 303 |
| 4. Intérêt du calcul trivalent | 304 |
| Section 2. Autres exemples de logiques plurivalentes | 304 |
| A. Les calculs standard | 304 |
| B. La logique probabilitaire | 306 |
| 1. Lois de Lukasiewicz | 306 |
| 2. Logique probabilitaire | 306 |
| 3. Logique plurivalente et calcul des probabilités..... | 308 |
| CHAPITRE IX. LOGIQUES MODALES | 311 |
| Section 1. Les modalités et leur expression formelle..... | 311 |
| A. Notion de modalité et opérateurs modaux | 311 |
| 1. Définition de la modalité | 311 |
| 2. Précisions sur le vocabulaire | 312 |
| 3. L'expression des modalités | 313 |
| 4. Les opérateurs modaux | 314 |
| 5. L'interprétation des opérateurs modaux | 316 |
| B. L'implication stricte de Lewis | 318 |
| 1. L'implication matérielle..... | 318 |
| 2. Les paradoxes de l'implication | 319 |
| 3. Définition de l'implication stricte | 319 |
| 4. Les difficultés du système de Lewis | 320 |
| Section 2. Les systèmes modaux | 321 |
| A. Les systèmes modaux \mathcal{S} | 322 |
| 1. Le système \mathcal{S}_1 | 322 |
| 2. Le système \mathcal{S}_2 | 323 |
| 3. Le système \mathcal{S}_3 | 323 |
| 4. Le système \mathcal{S}_4 | 323 |
| 5. Le système \mathcal{S}_5 | 324 |
| 6. Les systèmes \mathcal{S}_6 , \mathcal{S}_7 et \mathcal{S}_8 | 324 |

| | |
|--|-----|
| B. <i>Le système modal \mathfrak{S}</i> | 325 |
| 1. Formalisation de \mathfrak{S} | 325 |
| 2. Note sur la compatibilité | 328 |
| 3. Un calcul modal des prédicats | 329 |
| 4. Difficultés générales de la logique modale | 330 |
| 5. Les systèmes modaux au sens large | 331 |

CHAPITRE X. LES LOGIQUES AFFAIBLIES

| | |
|---|-----|
| <i>Section unique</i> | 333 |
| A. <i>La négation et ses interprétations</i> | 333 |
| B. <i>Quelques logiques à faible nombre d'axiomes</i> | 335 |
| 1. La logique intuitionniste \mathbb{J} de Heyting | 336 |
| 2. La logique de la négation stricte \mathcal{N} de Curry | 341 |
| 3. La logique minimale \mathcal{M} de Johansson | 342 |
| 4. La logique positive \mathcal{P} | 342 |
| 5. La logique absolue \mathcal{A} | 342 |
| 6. Vue d'ensemble sur les logiques affaiblies | 342 |
| C. <i>Les systèmes partiels</i> | 343 |
| 1. Définition | 343 |
| 2. Le calcul implicationnel | 343 |
| 3. Le calcul équivalentiel | 344 |

CINQUIÈME PARTIE

LES RELATIONS, L'IDENTITÉ ET L'ABSTRACTION

CHAPITRE XI. LA LOGIQUE DES RELATIONS

| | |
|--|-----|
| <i>Section 1. Définition et propriétés des relations</i> | 347 |
| A. <i>Définitions et notations</i> | 348 |
| 1. Les relations | 348 |
| 2. Domaine d'une relation | 349 |
| 3. Codomaine d'une relation | 349 |
| 4. Champ et extension d'une relation | 349 |
| 5. Domaine de définition et classe associée | 350 |
| 6. Représentation matricielle | 351 |
| B. <i>Propriétés formelles des relations binaires</i> | 351 |
| 1. La symétrie et les relations qui en dépendent | 351 |
| 2. La transitivité et les relations qui en dépendent | 354 |
| 3. La réflexivité et les relations qui en dépendent | 356 |
| 4. Rapports entre ces relations | 357 |

| | |
|--|------------|
| 5. Propriétés définies à partir du domaine et du codomaine des relations | 357 |
| Section 2. Etude de quelques relations | 361 |
| A. <i>Quelques relations importantes</i> | 361 |
| 1. Les relations d'équivalence | 361 |
| 2. Les relations connexes | 362 |
| 3. Les relations denses | 363 |
| 4. Les relations d'ordre | 363 |
| B. <i>Opérations sur les relations</i> | 364 |
| 1. Opérations analogues à celles du calcul des propositions | 364 |
| 2. La conversion ou inversion | 365 |
| 3. La conjonction relative ou produit relatif | 365 |
| C. <i>Règles de syntaxe</i> | 367 |
| 1. Abstraites de relation | 367 |
| 2. Lois logiques des relations | 368 |
| 3. Importance de la logique des relations | 369 |
| CHAPITRE XII. L'EXPRESSION MODERNE DES SYLLOGISMES.. | 370 |
| Section 1. Ecriture des propositions composées en logique classique et en logique moderne | 370 |
| 1. Critiques des logiciens modernes | 371 |
| 2. Réponse aux critiques | 373 |
| 3. Traduction des propositions universelles et particulières... | 375 |
| Section 2. La méthode de Lukasiewicz | 377 |
| 1. Rappels sur les syllogismes | 378 |
| 2. Notation des relations | 379 |
| 3. Les quatre modes concluants de la première figure | 379 |
| 4. Les quatre modes concluants de la deuxième figure | 380 |
| 5. Les six modes concluants de la troisième figure | 383 |
| 6. Les cinq modes concluants de la quatrième figure | 384 |
| 7. Le système de Lukasiewicz | 385 |
| Section 3. La méthode de Dopp et ses applications | 386 |
| 1. Principe de la méthode | 386 |
| 2. Les inférences immédiates | 387 |
| 3. Arguments et tautologies | 390 |
| 4. Les quatre modes concluants de la première figure | 390 |
| 5. Les quatre modes concluants de la deuxième figure | 391 |
| 6. Les six modes concluants de la troisième figure | 392 |
| 7. Les cinq modes concluants de la quatrième figure | 392 |
| 8. Réduction des modes | 393 |

| | |
|---|-----|
| CHAPITRE XIII. LA LOGIQUE DE L'IDENTITÉ | 396 |
| Section 1. Calcul des prédicats avec identité | 397 |
| 1. Les symboles | 398 |
| 2. Les propriétés de l'identité | 398 |
| 3. Les expressions bien formées | 399 |
| 4. Les axiomes | 399 |
| 5. Les propriétés du prédicat d'égalité | 399 |
| 6. Les lois logiques de l'identité | 400 |
| Section 2. Définition des propriétés des relations à l'aide de l'identité.... | 401 |
| 1. Nouvelle expression de propriétés déjà connues | 401 |
| 2. Nouvelle propriété des relations | 401 |
| 3. L'isomorphisme ou identité de structures | 402 |
| Section 3. Les descriptions d'objets | 403 |
| 1. Les descriptions d'objets | 403 |
| 2. Utilisation du symbole ι | 405 |
| 3. Avantages de l'opérateur ι | 405 |
| 4. Limites de l'opérateur ι | 407 |
| CHAPITRE XIV. L'ABSTRACTION ET LE RETOUR AUX CLASSES | 408 |
| Section 1. Définition des classes à partir des fonctions propositionnelles | 408 |
| 1. Définition des classes à partir des prédicats | 408 |
| 2. L'axiome d'extensionnalité | 409 |
| 3. Le principe d'abstraction..... | 410 |
| Section 2. Le calcul des classes et l'antinomie de Russell | 411 |
| A. Le calcul des classes..... | 411 |
| 1. Définitions..... | 412 |
| 2. Opérations sur les classes | 412 |
| 3. Axiomes et propriétés du calcul | 412 |
| 4. Les relations entre classes | 414 |
| B. L'antinomie de Russell..... | 416 |
| 1. Dédution de Russell..... | 416 |
| 2. La théorie de la hiérarchie des types logiques..... | 418 |

SIXIÈME PARTIE

STRUCTURES LOGIQUES

| | |
|--|-----|
| CHAPITRE XV. LA LOGIQUE ET LES STRUCTURES | 423 |
| <i>Section 1. La logique et les structures algébriques</i> | 423 |
| A. <i>L'algèbre de Boole</i> | 424 |
| 1. Le quintuple $[E, \cup, \cap, -, =]$ | 424 |
| 2. Logique des classes et algèbre de Boole | 425 |
| 3. Calcul \mathcal{C} des propositions et algèbre de Boole | 425 |
| 4. La dualité | 426 |
| 5. Interprétation de l'algèbre de Boole | 428 |
| B. <i>La structure de lattice</i> | 429 |
| 1. Définition de la structure de lattice | 430 |
| 2. Propriétés | 431 |
| 3. Lattice de Boole | 434 |
| 4. Interprétation de la structure de lattice | 435 |
| C. <i>La structure de groupe</i> | 436 |
| 1. Définition de la structure de groupe | 436 |
| 2. Élément inverse | 437 |
| 3. Classes, propositions et structures de groupe | 438 |
| D. <i>La structure d'anneau</i> | 440 |
| 1. Définition de la structure d'anneau | 440 |
| 2. Logique des propositions et structure d'anneau | 440 |
| 3. Structures fondamentales de la logique | 442 |
| <i>Section 2. Les groupements et le groupe INRC</i> | 443 |
| A. <i>La structure de groupement</i> | 444 |
| 1. Intérêt de cette structure | 444 |
| 2. Formalisation de la structure de groupement | 444 |
| 3. Importance de la structure de groupement | 445 |
| 4. Notion de transformation logique | 446 |
| B. <i>Le groupe INRC de Piaget</i> | 447 |
| 1. Rappel des seize opérations binaires | 447 |
| 2. Les transformations INRC | 447 |
| 3. Le groupe INRC | 449 |
| 4. Retour à l'ensemble E des seize opérations binaires | 450 |
| 5. Généralisation des transformations INRC | 451 |

| | | |
|-------------|--|-----|
| ANNEXE I. | Table de correspondance des différents symboles employés dans les traités de logique | 455 |
| ANNEXE II. | Quelques systèmes d'axiomes pour la logique des propositions | 456 |
| ANNEXE III. | Liste des ouvrages cités | 465 |

EXERCICES

| | | |
|----|-------------------------------------|-----|
| 1. | <i>Énoncés des exercices</i> | 467 |
| 2. | <i>Corrigés des exercices</i> | 470 |

INDEX