

# INHALTSVERZEICHNIS

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage .....	5
Vorwort .....	7
Zusatz zur fünften Auflage .....	12

## ERSTER TEIL

### Elemente der Logik. Deduktive Methode

#### I. Über den Gebrauch der Variablen

1. Konstanten und Variablen .....	17
2. Ausdrücke, die Variablen enthalten: Satz- und Bezeichnungsfunktionen .....	18
3. Aufstellung von mathematischen Lehrsätzen mit Hilfe von Variablen. Generelle und existenzielle Sätze .....	21
4. Der Allquantor und der Existenzquantor; freie und gebundene Variablen .....	23
5. Die Bedeutung der Variablen für die Mathematik .....	26
Übungsaufgaben .....	27

#### II. Über den Aussagenkalkül

6. Logische Konstanten; die alte und die neue Logik .....	31
7. Der Aussagenkalkül; die Negation eines Satzes, die Konjunktion und die Disjunktion von Sätzen .....	32
8. Die Implikation oder der Bedingungssatz; die Implikation in materialer Bedeutung .....	36
9. Der Gebrauch der Implikation in der Mathematik .....	41
10. Die Äquivalenz von Sätzen .....	45
11. Die Formulierung von Definitionen und ihre Regeln .....	46
12. Lehrsätze des Aussagenkalküls .....	49
13. Symbolik des Aussagenkalküls; Wahrheitsfunktionen und Wahrheitstafeln .....	51
14. Anwendung von Lehrsätzen des Aussagenkalküls in mathematischen Beweisen .....	57
15. Schlußregeln, vollständige Beweise .....	59
Übungsaufgaben .....	61

## III. Über die Theorie der Identität

16. Logische Begriffe außerhalb des Aussagenkalküls; Begriff der Identität .....	66
17. Wichtigste Lehrsätze aus der Theorie der Identität .....	67
18. Identität von Dingen und Identität ihrer Bezeichnungen; der Gebrauch von Anführungsstrichen .....	69
19. Die Gleichheit in der Arithmetik und Geometrie und ihre Beziehung zu der logischen Identität .....	72
20. Numerische Quantoren .....	74
Übungsaufgaben .....	76

## IV. Über die Klassentheorie

21. Mengen und ihre Elemente .....	79
22. Mengen und Satzfunktionen einer freien Variablen .....	80
23. Die Allklasse und die Nullklasse .....	83
24. Grundbeziehungen zwischen Mengen .....	84
25. Operationen mit Mengen .....	87
26. Gleichmächtige Mengen, Anzahl der Elemente einer Menge, endliche und unendliche Mengen; Arithmetik als Teil der Logik .....	89
Übungsaufgaben .....	92

## V. Über die Relationstheorie

27. Beziehungen, ihre Bereiche und Gegenbereiche; Beziehungen und Satzfunktionen mit zwei freien Variablen .....	97
28. Der Relationskalkül .....	99
29. Einige Eigenschaften von Relationen .....	103
30. Beziehungen, die zugleich reflexiv, symmetrisch und transitiv sind .....	104
31. Ordnungsbeziehungen; Beispiele anderer Beziehungen .....	106
32. Eindeutige Beziehungen oder Funktionen .....	108
33. Umkehrbare Funktionen und eineindeutige Zuordnungen .....	112
34. Mehrgliedrige Beziehungen; Funktionen von mehreren Variablen und Operationen .....	114
35. Die Bedeutung der Logik für andere Wissenschaften .....	117
Übungsaufgaben .....	118

## VI. Über die deduktive Methode

36. Fundamentale Bestandteile einer deduktiven Theorie: Grundbegriffe und definierte Begriffe, Axiome und Theoreme .....	126
37. Modell und Interpretation einer deduktiven Theorie .....	129

38. Deduktionsgesetz; formaler Charakter deduktiver Wissenschaften .....	134
39. Wahl der Axiome und Grundbegriffe; ihre Unabhängigkeit .	139
40. Formalisierung von Definitionen und Beweisen, formalisierte deduktive Theorien .....	141
41. Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit einer deduktiven Theorie; das Entscheidungsproblem .....	143
42. Der erweiterte Begriff einer Methodologie der deduktiven Wissenschaften .....	147
Übungsaufgaben .....	149

## ZWEITER TEIL

## Anwendungen der Logik und der Methodologie beim Aufbau mathematischer Theorien

### VII. Aufbau einer mathematischen Theorie: Sätze über die Anordnung von Zahlen

43. Grundbegriffe der aufzubauenden Theorie; Axiome für die Grundbeziehungen zwischen Zahlen .....	162
44. Sätze der Irreflexivität für die Grundbeziehungen; indirekte Beweise .....	164
45. Weitere Sätze über die Grundbeziehungen .....	166
46. Andere Beziehungen zwischen Zahlen .....	169
Übungsaufgaben .....	172

### VIII. Aufbau einer mathematischen Theorie: Sätze über Addition und Subtraktion

47. Axiome für die Addition; allgemeine Eigenschaften von Operationen, Begriffe der Gruppe und der Abelschen Gruppe	175
48. Kommutative und assoziative Gesetze für eine größere Anzahl von Summanden .....	177
49. Monotoniegesetze der Addition und ihre Umkehrungen ....	178
50. Geschlossene Systeme von Sätzen .....	183
51. Folgerungen aus den Sätzen der Monotonie .....	184
52. Definition der Subtraktion; inverse Operationen .....	187
53. Definitionen, deren Definiendum das Gleichheitszeichen enthält .....	188
54. Theoreme über die Subtraktion .....	190
Übungsaufgaben .....	192

## IX. Methodologische Betrachtungen über die aufgestellte Theorie

55. Elimination überflüssiger Axiome aus dem ursprünglichen Axiomensystem .....	198
56. Unabhängigkeit der Axiome des vereinfachten Systems ...	201
57. Elimination überflüssiger Grundbegriffe und Vereinfachung des Axiomensystems; Begriff der geordneten Abelschen Gruppe .....	203
58. Weitere Vereinfachung des Axiomensystems; mögliche Umformungen des Systems der Grundbegriffe .....	206
59. Das Problem der Widerspruchsfreiheit der aufgestellten Theorie .....	210
60. Das Problem der Vollständigkeit der aufgestellten Theorie ..	211
Übungsaufgaben .....	213

## X. Erweiterung der aufgebauten Theorie — Grundlagen der Arithmetik der reellen Zahlen

61. Erstes Axiomensystem für die Arithmetik der reellen Zahlen	219
62. Nähere Charakterisierung des ersten Axiomensystems; methodologische Vorteile und didaktische Nachteile desselben ....	220
63. Zweites Axiomensystem für die Arithmetik der reellen Zahlen	223
64. Nähere Charakterisierung des zweiten Axiomensystems; der Begriff des Körpers und des geordneten Körpers .....	224
65. Äquivalenz der beiden Axiomensysteme; methodologische Nachteile und didaktische Vorteile des zweiten Systems ...	226
Übungsaufgaben .....	227

Literaturhinweise .....	232
-------------------------	-----

Anhang: Wahrheit und Beweis .....	244
-----------------------------------	-----

A 1. Wahrheit .....	244
---------------------	-----

A 2. Beweis .....	263
-------------------	-----

A 3. Wahrheit <i>versus</i> Beweis .....	269
--	-----

Personen- und Sachverzeichnis .....	276
-------------------------------------	-----