

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	5
Aus dem Vorwort zur ersten Auflage	11

ERSTER TEIL

Elemente der Logik. Deduktive Methode

I. Über den Gebrauch der Variablen

1. Konstanten und Variablen	17
2. Ausdrücke, die Variablen enthalten: Satz- und Bezeichnungsfunktionen	18
3. Aufstellung von mathematischen Lehrsätzen mit Hilfe von Variablen. Generelle und existenzielle Sätze	21
4. Der Allquantor und der Existenzquantor; freie und gebundene Variablen	23
5. Die Bedeutung der Variablen für die Mathematik	26
Übungsaufgaben	27

II. Über den Aussagenkalkül

6. Logische Konstanten; die alte und die neue Logik	31
7. Der Aussagenkalkül; die Negation eines Satzes, die Konjunktion und die Disjunktion von Sätzen	32
8. Die Implikation oder der Bedingungssatz; die Implikation in materialer Bedeutung	36
9. Der Gebrauch der Implikation in der Mathematik	41
10. Die Äquivalenz von Sätzen	45
11. Die Formulierung von Definitionen und ihre Regeln	46
12. Lehrsätze des Aussagenkalküls	49
13. Symbolik des Aussagenkalküls; Wahrheitsfunktionen und Wahrheitstafeln	51
14. Anwendung von Lehrsätzen des Aussagenkalküls in mathematischen Beweisen	57
15. Schlußregeln, vollständige Beweise	59
Übungsaufgaben	61

III. Über die Theorie der Identität

16. Logische Begriffe außerhalb des Aussagenkalküls; Begriff der Identität	66
17. Wichtigste Lehrsätze aus der Theorie der Identität	67
18. Identität von Dingen und Identität ihrer Bezeichnungen; der Gebrauch von Anführungsstrichen	69
19. Die Gleichheit in der Arithmetik und Geometrie und ihre Beziehung zu der logischen Identität	72
20. Numerische Quantoren	74
Übungsaufgaben	76

IV. Über die Klassentheorie

21. Mengen und ihre Elemente	79
22. Mengen und Satzfunktionen einer freien Variablen	80
23. Die Allklasse und die Nullklasse	83
24. Grundbeziehungen zwischen Mengen	84
25. Operationen mit Mengen	87
26. Gleichmächtige Mengen, Anzahl der Elemente einer Menge, endliche und unendliche Mengen; Arithmetik als Teil der Logik	89
Übungsaufgaben	92

V. Über die Relationstheorie

27. Beziehungen, ihre Bereiche und Gegenbereiche; Beziehungen und Satzfunktionen mit zwei freien Variablen	97
28. Der Relationskalkül	99
29. Einige Eigenschaften von Relationen	103
30. Beziehungen, die zugleich reflexiv, symmetrisch und transitiv sind	104
31. Ordnungsbeziehungen; Beispiele anderer Beziehungen	106
32. Eindeutige Beziehungen oder Funktionen	108
33. Umkehrbare Funktionen und eineindeutige Zuordnungen	112
34. Mehrgliedrige Beziehungen; Funktionen von mehreren Variablen und Operationen	114
35. Die Bedeutung der Logik für andere Wissenschaften	117
Übungsaufgaben	118

VI. Über die deduktive Methode

36. Fundamentale Bestandteile einer deduktiven Theorie: Grundbegriffe und definierte Begriffe, Axiome und Theoreme	126
37. Modell und Interpretation einer deduktiven Theorie	129

38. Deduktionsgesetz; formaler Charakter deduktiver Wissenschaften	134
39. Wahl der Axiome und Grundbegriffe; ihre Unabhängigkeit .	139
40. Formalisierung von Definitionen und Beweisen, formalisierte deduktive Theorien	141
41. Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit einer deduktiven Theorie; das Entscheidungsproblem	143
42. Der erweiterte Begriff einer Methodologie der deduktiven Wissenschaften	147
Übungsaufgaben	149

ZWEITER TEIL

Anwendungen der Logik und der Methodologie beim Aufbau mathematischer Theorien

VII. Aufbau einer mathematischen Theorie: Sätze über die Anordnung von Zahlen

43. Grundbegriffe der aufzubauenden Theorie; Axiome für die Grundbeziehungen zwischen Zahlen	162
44. Sätze der Irreflexivität für die Grundbeziehungen; indirekte Beweise	164
45. Weitere Sätze über die Grundbeziehungen	166
46. Andere Beziehungen zwischen Zahlen	169
Übungsaufgaben	172

VIII. Aufbau einer mathematischen Theorie: Sätze über Addition und Subtraktion

47. Axiome für die Addition; allgemeine Eigenschaften von Operationen, Begriffe der Gruppe und der Abelschen Gruppe	175
48. Kommutative und assoziative Gesetze für eine größere Anzahl von Summanden	177
49. Monotoniegesetze der Addition und ihre Umkehrungen	178
50. Geschlossene Systeme von Sätzen	183
51. Folgerungen aus den Sätzen der Monotonie	184
52. Definition der Subtraktion; inverse Operationen	187
53. Definitionen, deren Definiendum das Gleichheitszeichen enthält	188
54. Theoreme über die Subtraktion	190
Übungsaufgaben	192

IX. Methodologische Betrachtungen über die aufgestellte Theorie	
55. Elimination überflüssiger Axiome aus dem ursprünglichen Axiomensystem	198
56. Unabhängigkeit der Axiome des vereinfachten Systems ...	201
57. Elimination überflüssiger Grundbegriffe und Vereinfachung des Axiomensystems; Begriff der geordneten Abelschen Gruppe	203
58. Weitere Vereinfachung des Axiomensystems; mögliche Umformungen des Systems der Grundbegriffe	206
59. Das Problem der Widerspruchsfreiheit der aufgestellten Theorie	210
60. Das Problem der Vollständigkeit der aufgestellten Theorie ..	211
Übungsaufgaben	213
X. Erweiterung der aufgebauten Theorie — Grundlagen der Arithmetik der reellen Zahlen	
61. Erstes Axiomensystem für die Arithmetik der reellen Zahlen	219
62. Nähere Charakterisierung des ersten Axiomensystems; methodologische Vorteile und didaktische Nachteile desselben	220
63. Zweites Axiomensystem für die Arithmetik der reellen Zahlen	223
64. Nähere Charakterisierung des zweiten Axiomensystems; der Begriff des Körpers und des geordneten Körpers	224
65. Äquivalenz der beiden Axiomensysteme; methodologische Nachteile und didaktische Vorteile des zweiten Systems ...	226
Übungsaufgaben	227
Literaturhinweise	232
Personen- und Sachverzeichnis	244