

Inhaltsverzeichnis

§ 1. Das Problem der Widerspruchsfreiheit in der Axiomatik als logisches Entscheidungsproblem	1
a) Formale Axiomatik	1
1. Verhältnis der formalen zur inhaltlichen Axiomatik; Frage der Widerspruchsfreiheit; Arithmetisierung	1
2. Geometrische Axiome als Beispiel	3
3. Rein logische Fassung der Axiomatik	7
b) Das Entscheidungsproblem	8
1. Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit	8
2. Entscheidung für endliche Individuenbereiche.	9
3. Methode der Aufweisung	11
c) Die Frage der Widerspruchsfreiheit bei unendlichem Individuenbereich	14
1. Formeln, die nicht im Endlichen erfüllbar sind; die Zahlenreihe als Modell	14
2. Problematik des Unendlichen	15
3. Nachweis der Widerspruchsfreiheit als Unmöglichkeitsbeweis; Methode der Arithmetisierung	17
§ 2. Die elementare Zahlentheorie. — Das finite Schließen und seine Grenzen	20
a) Die Methode der anschaulichen Überlegung und ihre Anwendung in der elementaren Zahlentheorie	20
1. Begriff der Ziffer; Beziehung „kleiner“; Addition	20
2. Rechengesetze; vollständige Induktion; Multiplikation; Teilbarkeit; Primzahl	23
3. Rekursive Definitionen	25
4. Unmöglichkeitsbeweis	27
b) Weitere Anwendungen anschaulicher Überlegungen.	28
1. Beziehung zwischen Zahlentheorie und Anzahlenlehre	28
2. Standpunkt der formalen Algebra	29
c) Der finite Standpunkt; Überschreitung dieses Standpunktes bereits in der Zahlentheorie	32
1. Logische Charakterisierung des finiten Standpunktes.	32
2. Das „tertium non datur“ für ganze Zahlen; das Prinzip der kleinsten Zahl	34
d) Nichtfinite Methoden in der Analysis	36
1. Verschiedene Definitionen der reellen Zahl	36
2. Obere Grenze einer Zahlenfolge; obere Grenze einer Zahlenmenge	38
3. Das Auswahlprinzip	40

e)	Untersuchungen zur direkten finiten Begründung der Arithmetik; Rückkehr zur früheren Problemstellung; die Beweistheorie	42
§ 3.	Die Formalisierung des logischen Schließens I: Der Aussagenkalkül	45
a)	Theorie der Wahrheitsfunktionen	45
1.	Die Wahrheitsfunktionen und ihre Schemata	45
2.	Ersetzbarkeit; Ersetzungsregeln	47
3.	Beispiele von Ersetzbarkeiten	50
4.	Dualität; konjunktive und disjunktive Normalform; identisch wahre Ausdrücke; Entscheidungsverfahren	52
5.	Ausgezeichnete Normalform; Entscheidung über Ersetzbarkeit; Beispiele	55
b)	Anwendung der Theorie der Wahrheitsfunktionen auf das logische Schließen; Formalisierung aussagenlogischer Schlüsse mittels der identisch wahren Ausdrücke, der Einsetzungsregel und des Schlußschemas	59
c)	Deduktive Aussagenlogik	63
1.	Problemstellung	63
2.	Ein System der deduktiven Aussagenlogik; Vollständigkeitseigenschaften dieses Systems	65
3.	Positive Logik; reguläre Implikationsformeln; positiv identische Implikationsformeln; Möglichkeiten der Kürzung	67
d)	Unabhängigkeitsbeweise nach der Methode der Wertung	71
1.	Die logische Interpretation als Wertung; das allgemeine Verfahren	71
2.	Unabhängigkeitsbeweise für das aufgestellte System; noch ein weiterer Unabhängigkeitsbeweis	74
3.	Anwendung der Wertungsmethode auf die Frage der Vertretbarkeit von Formeln durch Schemata	79
e)	Rückkehr zu der unter b) betrachteten Art der Formalisierung des Schließens; abkürzende Regeln; Bemerkung über den Fall eines Widerspruchs	84
§ 4.	Die Formalisierung des Schließens II: Der Prädikatenkalkül	86
a)	Einführung der Individuenvariablen; Begriff der Formel; Einsetzungsregel; Beispiel; Vergleich mit dem inhaltlichen Schließen	86
b)	Die gebundenen Variablen und die Regeln für Allzeichen und Seinszeichen	92
1.	Unzulänglichkeit der freien Variablen	93
2.	Einführung der gebundenen Variablen; Allzeichen und Seinszeichen; Regel der Umbenennung; Vermeidung von Mehrdeutigkeiten; Erweiterung des Begriffs der Formel sowie der Einsetzungsregel	94
3.	Heuristische Einführung der Regeln für die Allzeichen und Seinszeichen; inhaltliche Deutung der Formeln und Schemata	99
4.	Zusammenstellung der Regeln des Prädikatenkalküls; Darstellung der Formen kategorischer Urteile; Ausschluß des leeren Individuenbereichs	104

c)	Ausführung von Ableitungen	106
1.	Einige abgeleitete Regeln	106
2.	Ableitung von Formeln	109
d)	Systematische Fragen	117
1.	Begriff der \mathfrak{f} -zählig identischen Formel und der im Endlichen identischen Formel; deduktive Abgeschlossenheit der Gesamtheit der \mathfrak{f} -zählig identischen Formeln; Widerspruchsfreiheit des Prädikatenkalküls; Vollständigkeitsfragen	118
2.	Exkurs über die mengentheoretische Prädikatenlogik; Vorläufiges zu den Fragen der Vollständigkeit; das Entscheidungsproblem und seine Verschärfung unter dem deduktiven Gesichtspunkt	125
e)	Betrachtungen über den Formalismus des Prädikatenkalküls	131
1.	Begriff der Überführbarkeit; abgeleitete Regeln	131
2.	Überführung von Formeln in pränexen Formeln; Beispiele; Abgrenzung von Fällen der Lösung des Entscheidungsproblems an Hand der pränexen Normalform	139
3.	Zerlegung einer Formel des einstelligen Prädikatenkalküls in Primärformeln; Beispiel	145
f)	Deduktionsgleichheit und Deduktionstheorem	148
1.	Begriff der Deduktionsgleichheit; zwei wesentliche Fälle von Deduktionsgleichheit; Überführbarkeit und Deduktionsgleichheit	148
2.	Das Deduktionstheorem	150
3.	Anwendungen des Deduktionstheorems: Zurückführung axiomatischer Fragen auf solche der Ableitbarkeit von Formeln des Prädikatenkalküls; erleichterte Feststellung der Ableitbarkeit; Betrachtung einer gebräuchlichen Schlußweise	154
4.	Deduktionsgleichheit einer jeden Formel mit einer SKOLEMSchen Normalform sowie auch mit einer Normaldisjunktion; Vereinfachung des Überganges	157
§ 5.	Hinzunahme der Identität. Vollständigkeit des einstelligen Prädikatenkalküls.	163
a)	Erweiterung des Formalismus	163
1.	Das Gleichheitszeichen; Darstellung von Anzahlaussagen; die Gleichheitsaxiome und die formalen Eigenschaften der Identität	164
2.	Verwendung der Gleichheitsaxiome zu Umformungen, insbesondere solchen von Anzahlbedingungen; Anzahlformeln	168
3.	Zerlegung einer Formel des erweiterten einstelligen Prädikatenkalküls in Primärformeln	178
4.	Ausdehnung des Begriffes der \mathfrak{f} -zählig identischen Formel; deduktive Abgeschlossenheit der Gesamtheit der \mathfrak{f} -zählig identischen Formeln; Eindeutigkeitsbetrachtung	183
5.	Hinzunahme von Funktionszeichen; Begriff des Terms; ableitbare Formeln	186
b)	Lösung von Entscheidungsproblemen; Vollständigkeitssätze	189
1.	Entscheidung über die Ableitbarkeit solcher pränexer Formeln des Prädikatenkalküls, bei denen jedes Allzeichen jedem Seinszeichen vorhergeht; Entscheidbarkeit im Endlichen	190

2. Ableitbarkeit einer jeden im Endlichen identischen Formel des einstelligen Prädikatenkalkuls, Nachweis mit Hilfe des vorherigen Entscheidungsverfahrens; ein mengentheoretischer Nachweis und seine finite Verschärfung	192
3. Deduktionsgleiche Normalform für eine Formel des erweiterten einstelligen Prädikatenkalkuls	198
4. Vollständigkeitssätze für den erweiterten einstelligen Prädikatenkalkul	205
§ 6. Widerspruchsfreiheit unendlicher Individuenbereiche. Anfänge der Zahlentheorie	208
a) Überleitung von der Frage der Unableitbarkeit gewisser im Endlichen identischer Formeln des Prädikatenkalkuls zur Frage der Widerspruchsfreiheit eines zahlentheoretischen Axiomensystems	208
1. Ersetzung der Formelvariablen durch Prädikatensymbole; eine Abhängigkeit zwischen den betrachteten Formeln	209
2. Einbeziehung der Gleichheitsaxiome; die DEDEKINDSche Unendlichkeitsdefinition; Einführung des Strichsymbols	212
3. Übergang zu Axiomen ohne gebundene Variablen unter Verschärfung der Existenzaxiome; das Symbol 0; Ziffern im neuen Sinne; PEANO-Sche Axiome; Zusammenstellung der erhaltenen Axiome	215
b) Allgemein logischer Teil des Nachweises der Widerspruchsfreiheit	219
1. Spezialisierung der Endformel; Ausschluß gebundener Variablen; Auflösung in Beweisfäden	219
2. Rückverlegung der Einsetzungen; Ausschaltung der freien Variablen; numerische Formeln; Definition von „wahr“ und „falsch“; „Wahrheit“ einer jeden ohne Benutzung gebundener Variablen ableitbaren Formel	224
3. Einbeziehung der gebundenen Variablen; Maßregel zur Erhaltung der Schemata bei der Rückverlegung der Einsetzungen; Unzulänglichkeit des bisherigen Verfahrens	230
c) Durchführung des Nachweises der Widerspruchsfreiheit mittels eines Reduktionsverfahrens	233
1. Ausschaltung der Allzeichen; die Reduktionsschritte; Begriff der Reduzierten	233
2. Verifizierbare Formeln; Eindeutigkeitsatz; Hilfssätze	237
3. Verifizierbarkeit einer jeden ableitbaren, von Formelvariablen freien Formel; Wiedereinbeziehung der Allzeichen; Ersetzbarkeit von Axiomen durch Axiomenschemata	243
d) Übergang zu einem (im Bereich der Formeln ohne Formelvariablen) deduktiv abgeschlossenen Axiomensystem	248
1. Unableitbarkeit gewisser verifizierbarer Formeln durch das betrachtete Axiomensystem; Nachweis mit Hilfe von „Ziffern zweiter Art“	248
2. Ansatz zur Vervollständigung des Axiomensystems; Ableitbarkeit einer Reihe von Äquivalenzen als hinreichende Bedingung	252
3. Deduktive Zurückführung der Äquivalenzen auf fünf zu den Axiomen hinzuzufügende Formeln; Vereinfachungen; das System (A)	255
4. Vollständigkeitseigenschaften des Systems (A)	262

e)	Einbeziehung der vollständigen Induktion	264
1.	Formalisierung des Prinzips der vollständigen Induktion durch eine Formel oder durch ein Schema; Gleichwertigkeit der beiden Formalisierungen; Unverändertheit des Bereiches der ableitbaren Formeln ohne Formelvariablen bei der Hinzunahme des Induktionsschemas zu dem System (A)	264
2.	Vereinfachung des Axiomensystems bei Hinzunahme des Induktionsaxioms; das System (B)	269
f)	Unabhängigkeitsbeweise	274
1.	Unableitbarkeit des Induktionsaxioms aus dem System (A)	274
2.	Unabhängigkeitsbeweise mittels eines Substitutionsverfahrens	277
3.	Feststellung der übrigen Unabhängigkeiten durch Modifikationen des Reduktionsverfahrens	279
g)	Darstellung des Prinzips der kleinsten Zahl durch eine Formel; Gleichwertigkeit dieser Formel mit dem Induktionsaxiom bei Zugrundelegung der übrigen Axiome des Systems (B)	283
§ 7.	Die rekursiven Definitionen	286
a)	Grundsätzliche Erörterungen	286
1.	Das einfachste Schema der Rekursion; Formalisierung des anschaulichen Berechnungsverfahren; Gegenüberstellung von expliziter und rekursiver Definition	287
2.	Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Hinzunahme rekursiver Definitionen im Rahmen des elementaren Kalküls mit freien Variablen; Einbeziehung des Induktionsschemas	294
3.	Unmöglichkeit, die Widerspruchsfreiheit der rekursiven Definitionen schon aus der Widerspruchsfreiheit des vorherigen Axiomensystems zu folgern; Ersetzbarkeit arithmetischer Axiome durch rekursive Definitionen; explizite Definition von „ $<$ “ durch eine rekursive Funktion; Ableitung der Grundeigenschaften von „ $<$ “	300
b)	Die rekursive Zahlentheorie	309
1.	Ableitung der Gesetze für die Addition, Subtraktion, Multiplikation und die Beziehung „ $<$ “	309
2.	Darstellung von Aussagen durch Gleichungen der Form $t=0$; Summen und Produkte mit variabler Gliederzahl; Darstellung von allgemeinen und existentialen Aussagen über Zahlen $\leq n$, sowie von Maximum- und Minimumausdrücken	313
3.	Teilbarkeit; Division mit Rest; kleinster von 1 verschiedener Teiler; Reihe der Primzahlen; Zerlegung der Zahlen in Primfaktoren; umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Zahlen > 1 und den endlichen Folgen von Zahlen; Numerierung der Zahlenpaare; größter gemeinsamer Teiler; kleinstes gemeinsames Vielfaches	321
c)	Erweiterungen des Schemas der Rekursion und des Induktionsschemas	330
1.	Rekursionen, die sich auf das einfachste Rekursionsschema (die primitive Rekursion) zurückführen lassen: Wertverlaufsrekursionen, simultane Rekursionen	331
2.	Verschränkte Rekursionen; Unzurückführbarkeit gewisser verschränkter Rekursionen auf primitive Rekursionen	335
3.	Erweiterte Induktionsschemata; ihre Entbehrlichkeit	348

d)	Vertretbarkeit rekursiver Funktionen; Übergang zu einem für die Zahlentheorie ausreichenden Axiomensystem	355
1.	Rückkehr zum vollen Formalismus; das System (C); Begriff einer wesentlichen Erweiterung eines Formalismus; Beispiele von nicht wesentlichen Erweiterungen; Vertretbarkeit einer Funktion	355
2.	Nachweis, daß die Summe und die Differenz im Formalismus des Systems (B) nicht vertretbare Funktionen sind; die Rekursionsgleichungen für die Summe als Axiome; das System (D)	362
3.	Nachweis der Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit des Systems (D) nach der Methode der Reduktion; Unvertretbarkeit des Produktes im Formalismus des Systems (D)	368
4.	Veränderte Situation bei Hinzunahme der Rekursionsgleichungen für das Produkt; das System (Z)	379
e)	Ergänzende Betrachtungen über die Gleichheitsaxiome	382
1.	Ersetzung des zweiten Gleichheitsaxioms durch speziellere Axiome	382
2.	Anwendung auf die Axiomensysteme (A), (B), (Z)	384
3.	Anwendung auf das Entscheidungsproblem; Eliminierbarkeit der Gleichheitsaxiome aus einer Ableitung einer Formel des Prädikatenkalküls.	388
§ 8.	Der Begriff „derjenige, welcher“ und seine Eliminierbarkeit	392
a)	Die ι -Regel und ihre Handhabung	392
1.	Inhaltliche Erörterung; Einführung der ι -Regel; Vermeidung von Kollisionen; Darstellung von Funktionen durch ι -Terme	392
2.	Einlagerung und Überordnung; abkürzende Symbole	397
3.	Die Funktion $\omega(A)$; Formalisierung des Begriffs der kleinsten Zahl durch die Funktion $\mu_x A(x)$; Eindeutigkeitsformeln	401
b)	Deduktive Entwicklung der Zahlentheorie auf Grund des Axiomensystems (Z) unter Hinzunahme des formalisierten Begriffs der kleinsten Zahl	410
1.	Begriff „kleiner“; Kongruenz; Division mit Rest; Teilbarkeit; zueinander prime Zahlen	410
2.	Kleinstes gemeinsames Vielfaches von zwei Zahlen und von einer endlichen Folge von Zahlen; Maximum einer endlichen Folge von Zahlen	415
c)	Zurückführung primitiver Rekursionen auf explizite Definitionen mittels der Funktion $\mu_x A(x)$ bei Zugrundelegung des Systems (Z)	421
1.	Heuristischer Ansatz	421
2.	Formale Durchführung; Möglichkeit der Verallgemeinerung des Verfahrens	425
d)	Die Eliminierbarkeit der Kennzeichnungen (der ι -Symbole)	431
1.	Erweiterung der ι -Regel, Verhältnis zur ursprünglichen ι -Regel, die Terme $\iota_x^{(d)} A(x)$	432
2.	Der Ansatz von ROSSER und seine Vereinfachung durch HASENJAEGGER. Einsetzung von ι -Termen, das Axiom $\{t\}$, Beschaffenheit der in Frage stehenden formalen Systeme	435
3.	Erklärung der „Reduzierten“ einer Formel und Zurückführung des zu erbringenden Nachweises auf den Beweis der ι -freien Herleitbarkeit der nach einem gewissen Schema gebildeten Formeln	439

4. Durchführung dieses Beweises	441
5. Formulierung des Eliminationstheorems, Überführbarkeit jeder Formel in ihre Reduzierte, Vergleich verschiedener Eliminationsverfahren	448
e) Folgerungen aus der Eliminierbarkeit der Kennzeichnungen	451
1. Die Vertretbarkeit der rekursiven Funktionen im System (Z)	451
2. Allgemeines Verfahren der Ausschaltung von Funktionszeichen durch Einführung von Prädikatensymbolen; Ausschaltung von Individuensymbolen	455
3. Durchführung des Verfahrens an dem System (Z); Ausblick auf weitere Fragestellungen	458
f) Nachtrag: Ausdehnung des Satzes über die Vertretbarkeit des Gleichheitsaxioms (J_2) bei Hinzunahme der ι -Regel	464
Namenverzeichnis	467
Sachverzeichnis	468