

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort . . . . .	V
A. Die Zielsetzung des Buches . . . . .	V
B. Einige Hinweise zum Lesen des Buches . . . . .	VIII
C. Inhaltsübersicht . . . . .	IX
D. Abschluß des Vorwortes . . . . .	XVII

## Erster Teil.

### Alternäre Aussagenlogik.

§ 1. Vorläufige Abgrenzung der Aussagenlogik . . . . .	1
--	---

#### 1. Abschnitt.

#### Algebra der Logik.

<b>Kapitel I. Grundlegende Gesetze des BOOLEschen Verbandes . . . . .</b>	<b>4</b>
§ 2. Einführung . . . . .	4
§ 3. Der distributive Verband . . . . .	7
§ 4. Der BOOLEsche Verband . . . . .	11
§ 5. Erste Umformungen. Kürzungsgesetze . . . . .	13
§ 6. Die Elemente $\vee$ und $\wedge$ . . . . .	17
§ 7. Die Verneinungsgesetze . . . . .	20
§ 8. Dualität . . . . .	25
<b>Kapitel II. Strukturelle Einblicke in die logische Algebra . . . . .</b>	<b>29</b>
§ 9. Aussagenform. Vorläufiges zur Mitteilung in Fraktur . . . . .	29
§ 10. Die Umformungsregeln. Äquivalenzrelationen . . . . .	32
§ 11. Erste Nachweise durch Netzinduktion . . . . .	35
§ 12. Assoziante Aussagenform. Weitere Induktionsbeweise . . . . .	38
§ 13. Normalform . . . . .	40
§ 14. Ausgezeichnete Normalform . . . . .	42
<b>Kapitel III. Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Entscheidungsdefinitheit der logischen Algebra . . . . .</b>	<b>45</b>
§ 15. Kanonische Widerspruchsfreiheit . . . . .	45
§ 16. Gleichheit und Übereinstimmung ausgezeichneter Normalformen . . . . .	47
§ 17. Vollständigkeit . . . . .	49
§ 18. Entscheidungsdefinitheit . . . . .	50
§ 19. Gleichheitsklassen . . . . .	52
<b>Kapitel IV. Zusätze zum Ausbau und zur Interpretation der logischen Algebra</b>	<b>53</b>
§ 20. Vorläufige Einführung der alternären Implikation . . . . .	53
§ 21. Das Enthaltensein . . . . .	55
§ 22. Die Grundgesetze des Enthaltenseins . . . . .	57
§ 23. Das Enthaltensein als Grundrelation des Verbandes . . . . .	59
§ 24. Begriffslogik . . . . .	63

	Seite
Kapitel V. <b>Algebra der <math>\rightarrow\bar{\neg}</math>-Logik</b> . . . . .	67
§ 25. Begriffsnetz und Umformungsgerüst für die Algebra der $\rightarrow\bar{\neg}$ -Logik . . . . .	67
§ 26. Einige Herleitungen . . . . .	69
§ 27. Normalform und ausgezeichnete Normalreihe . . . . .	71
§ 28. Kanonische Widerspruchsfreiheit. Gleichheit und Übereinstimmung ausgezeichneter Normalreihen . . . . .	74
§ 29. Vollständigkeit und Entscheidungsdefinitheit . . . . .	75

## 2. Abschnitt.

**Wertende Logik.**

Kapitel VI. <b>Wahrheitswertung, Verknüpfungsbasen</b> . . . . .	76
§ 30. Einführendes zum ‚Wahrheitswert‘ . . . . .	76
§ 31. Die grundlegenden Wahrheitstafeln . . . . .	78
§ 32. Wahrheitsfunktionen. Wahrheitswertung . . . . .	80
§ 33. Die Beziehung der Wahrheitswertung zur Algebra der Logik . . . . .	83
§ 34. Binäre Verknüpfungen. Vorläufiges zur allgemeinen Aussagenform . . . . .	87
§ 35. Übersicht über die binären Verknüpfungen . . . . .	88
§ 36. Die Dualität . . . . .	91
§ 37. Begriffsabhängigkeit der Verknüpfungen. Verknüpfungsbasis . . . . .	92
§ 38. Binäre Verknüpfungsbasen . . . . .	93
Kapitel VII. <b>Wahrformen</b> . . . . .	98
§ 39. Überleitung von der logischen Algebra zu den Wahrformen . . . . .	98
§ 40. Wahrformen . . . . .	99
§ 41. Abgekürzte Wahrheitswertung . . . . .	102
§ 42. Zur Deutung der binären Verknüpfungen, insbesondere der alternären Implikation . . . . .	103
§ 43. Die wichtigsten Äquivalenz-Wahrformen (als Leseübung) . . . . .	105
§ 44. Die wichtigsten implikativen Wahrformen (Fortsetzung der Leseübung) . . . . .	110

Kapitel VIII. <b>Verallgemeinerte Wahrheitswertung (Quasiwahrheitswertung)</b> . . . . .	113
§ 45. Vorläufiger Ausblick auf die normaldeduktive Aussagenlogik . . . . .	113
§ 46. Quasiwahrheitswertung . . . . .	114
§ 47. Die „spezifische“ $2^n$ -wertige Quasiwahrheitswertung $\mathfrak{M}_n$ . . . . .	118
§ 48. Einige Eigenschaften der spezifischen Quasiwahrheitswertung . . . . .	120
§ 49. Mehrwertige Quasiwahrheitswertungen als sog. „mehrwertige Logiken“ . . . . .	124

## 3. Abschnitt.

**Grundlegende Begriffe zur deduktiven Logik.**

Kapitel IX. <b>Kodifikation</b> . . . . .	128
§ 50. Grundsätzliches zur Kodifikation . . . . .	129
§ 51. Kodifikate; I. Teil: das Begriffsnetz . . . . .	130
§ 52. Kodifikate; II. Teil: das Deduktionsgerüst . . . . .	133
§ 53. Logische Kodifikate. Logische Fundierung einer Theorie . . . . .	136
Kapitel X. <b>Grundlegende syntaktische Begriffsbildungen</b> . . . . .	138
§ 54. Die Syntax eines Kodifikats . . . . .	138
§ 55. Widerspruchsfreie, vollständige und entscheidungsdefinite Kodifikate . . . . .	140
§ 56. Unabhängige, einfache und anzahlminimale Axiomensysteme . . . . .	144
§ 57. Zum Gebrauch der Buchstabenzeichen . . . . .	145
§ 58. Äquivalente und deduktionsgleiche Satzgebilde; ableitbare und implizit abhängige Schlußregeln; Einsetzung und Umsetzung . . . . .	147

	Seite
§ 59. Inversion und Separation von Schlüssen; Elimination und Reduktion von Begriffen; Restriktion . . . . .	153
<b>Kapitel XI. Grundsätzliches zur deduktiven Aussagenlogik . . . . .</b>	<b>155</b>
§ 60. Vorläufige Umreißung der deduktiven Aussagenlogik . . . . .	155
§ 61. Das Verhältnis der deduktiven zur wertenden Aussagenlogik . . . . .	156
§ 62. Das Begriffsnetz einer deduktiven Aussagenlogik . . . . .	158
§ 63. Zur Syntax des Begriffsnetzes einer deduktiven Aussagenlogik . . . . .	161
§ 64. Das Deduktionsgerüst einer deduktiven, insbesondere einer normaldeduktiven Aussagenlogik . . . . .	165
§ 65. Zur Syntax des Deduktionsgerüsts einer deduktiven Aussagenlogik . . . . .	170
§ 66. Die Tragweite des normaldeduktiven Schließens . . . . .	174
§ 67. Fassungen der Widerspruchsfreiheits- und der Vollständigkeitsforderung . . . . .	176

#### 4. Abschnitt.

##### Normaldeduktive alternäre Aussagenlogik.

<b>Kapitel XII. Das Deduktionstheorem und Anschließendes . . . . .</b>	<b>179</b>
§ 68. Vorverlegung der Einsetzungen . . . . .	179
§ 69. Das aussagenlogische Deduktionstheorem . . . . .	181
§ 70. Das verallgemeinerte (aussagenlogische) Deduktionstheorem . . . . .	184
§ 71. Faktische Äquivalenz von Aussagenreihen . . . . .	185
<b>Kapitel XIII. Normaldeduktive alternäre <math>\vee\neg</math>-Aussagenlogik . . . . .</b>	<b>188</b>
§ 72. Das WHITEHEAD-RUSSELLSche Axiomensystem WR . . . . .	188
§ 73. Vorbemerkung über die abkürzende Mitteilung von Schlüssen . . . . .	190
§ 74. Einige grundlegende Herleitungen. Die „assoziativen“ Implikationen . . . . .	193
§ 75. Die Konjunktion in der deduktiven $\vee\neg$ -Aussagenlogik . . . . .	195
§ 76. Die „distributiven“ Implikationen . . . . .	197
§ 77. Die normaldeduktive Vollständigkeit des WHITEHEAD-RUSSELLSchen Axiomensystems . . . . .	198
§ 78. Die gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome des WHITEHEAD-RUSSELLSchen Systems . . . . .	200
<b>Kapitel XIV. Normaldeduktive alternäre <math>\rightarrow\neg</math>-Aussagenlogik . . . . .</b>	<b>203</b>
§ 79. Das $\rightarrow\neg$ -Axiomensystem von FREGE und ŁUKASIEWICZ . . . . .	203
§ 80. Einige Herleitungen aus den ersten beiden Axiomen . . . . .	204
§ 81. Eine Abwandlung des Axiomensystems . . . . .	206
§ 82. Einige Herleitungen aus allen drei Axiomen . . . . .	208
§ 83. Die gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome des FREGE-ŁUKASIEWICZSchen Systems . . . . .	209
§ 84. Die normaldeduktive Vollständigkeit des FREGE-ŁUKASIEWICZSchen Axiomensystems . . . . .	211
§ 85. Die normaldeduktive Unvollständigkeit des Axiomensystems D1, 2 . . . . .	213
§ 86. Normaldeduktive alternäre Implikationslogik . . . . .	214

#### 5. Abschnitt.

##### Aufsichtende alternäre Aussagenlogik.

<b>Kapitel XV. Natürliche alternäre aufsichtende Aussagenlogik . . . . .</b>	<b>217</b>
§ 87. Einführung in die Grundgedanken der aufsichtenden Logik . . . . .	217
§ 88. Das Begriffsnetz der natürlichen aufsichtenden alternären Aussagenlogik . . . . .	219

	Seite
§ 89. Das Deduktionsgerüst der natürlichen aufschichtenden alternären Aussagenlogik . . . . .	221
§ 90. Fundamentale Eigenschaften des Deduktionsgerüsts . . . . .	223
§ 91. Einige Herleitungen . . . . .	225
§ 92. Die Wahrformvollständigkeit des Kodifikats . . . . .	227
§ 93. Ein zweites Entscheidungsverfahren für die Wahrformeigenschaft . . . . .	230
<b>Kapitel XVI. Kürzungserweiterte aufschichtende Aussagenlogik . . . . .</b>	<b>233</b>
§ 94. Das natürliche kürzungserweiterte aufschichtende alternäre Aussagenkodifikat $K$ . . . . .	234
§ 95. Eine beweistheoretische Direktive zur Behandlung des Kodifikats $K$ . Einige fundamentale Nachweise . . . . .	235
§ 96. Allgemeinere Schematen für die aufschichtenden Schlüsse . . . . .	238
§ 97. Umkehrbarkeit aufschichtender Schlußregeln. — 1. Teil: $\neg$ -Inversion . . . . .	240
§ 98. Umkehrbarkeit aufschichtender Schlußregeln. — 2. Teil: $\wedge$ -hinten-, $\vee$ -vorne- und $\rightarrow$ -Inversion . . . . .	245
<b>Kapitel XVII. Schnittelimination beim natürlichen kürzungserweiterten Kodifikat <math>K</math> . . . . .</b>	<b>248</b>
§ 99. Die Schnitt-Schlußregel . . . . .	248
§ 100. Elimination von Schnitten, deren Schnittglied eine Variable ist . . . . .	251
§ 101. Schnittelimination allgemein . . . . .	253
§ 102. Umweglosigkeit . . . . .	255
<b>Kapitel XVIII. Aufschichtende alternäre <math>\vee\neg</math>-Logik . . . . .</b>	<b>259</b>
§ 103. Aufstellung des Kodifikats. — Einige fundamentale Nachweise . . . . .	259
§ 104. Die Vollständigkeit des Kodifikats . . . . .	262
§ 105. Umkehrbarkeit der aufschichtenden Schlußregeln . . . . .	264
§ 106. Schnittelimination . . . . .	266

## Zweiter Teil.

**Nichtalternäre Aussagenlogik.**

§ 107. Das Ziel der nichtalternären Logik . . . . .	268
---	-----

## 6. Abschnitt.

**Die derivative Aussagenlogik und ihre normaldeduktive Kodifikation.**

<b>Kapitel XIX. Derivative <math>\rightarrow</math>- und <math>\rightarrow\neg</math>-Logik . . . . .</b>	<b>271</b>
§ 108. Einführendes zur derivativen Logik . . . . .	271
§ 109. Die derivative Implikationslogik . . . . .	272
§ 110. Normaldeduktive Kodifikation der derivativen Implikationslogik . . . . .	274
§ 111. Formen zu mehrfach iterierten Schlüssen . . . . .	276
§ 112. Die derivative $\rightarrow\neg$ -Logik . . . . .	280
§ 113. Normaldeduktive Kodifikation der derivativen $\rightarrow\neg$ -Logik . . . . .	283
<b>Kapitel XX. Derivative <math>\rightarrow\wedge</math>- und <math>\rightarrow\wedge\neg</math>-Logik. . . . .</b>	<b>285</b>
§ 114. Grundsätzliches . . . . .	285
§ 115. Normaldeduktive Kodifikation der derivativen $\rightarrow\wedge$ -Logik und der derivativen $\rightarrow\wedge\neg$ -Logik. . . . .	287
§ 116. Der Widerspruch über einem Negat . . . . .	290
§ 117. Die unmittelbare Reduktion der derivativen $\rightarrow\wedge$ -Logik auf die deri- vative $\rightarrow$ -Logik . . . . .	291

	Seite
<b>Kapitel XXI. Entwickelnde derivative Implikationslogik . . . . .</b>	<b>296</b>
§ 118. Das Kodifikat der entwickelnden derivativen Implikationslogik . . . . .	296
§ 119. Einige beweisbare Formen und abhängige Schlußregeln. Das neue Kodifikat als ein derivatives . . . . .	299
§ 120. Die Simplizierung (als Vorbereitung für das Entscheidungsverfahren) . . . . .	303
§ 121. Die dem Entscheidungsverfahren zugrunde liegende Reduktion . . . . .	306
§ 122. Nachweis der Entscheidbarkeit . . . . .	310
§ 123. Übersicht und Anwendungsbeispiele zum Entscheidungsverfahren der derivativen $\rightarrow \wedge \neg$ -Logik . . . . .	313
<b>Kapitel XXII. Natürliche derivative Logik . . . . .</b>	<b>320</b>
§ 124. Die derivative $\rightarrow \vee$ -Logik und die derivative $\rightarrow \vee \neg$ -Logik. Grundsätzliches . . . . .	320
§ 125. Normaldeduktive Kodifikation der derivativen $\rightarrow \vee$ - und $\rightarrow \vee \neg$ -Logik. Einige Herleitungen in der derivativen $\rightarrow \vee$ -Logik . . . . .	322
§ 126. Die natürliche derivative Aussagenlogik und ihre normaldeduktive Kodifikation . . . . .	324
§ 127. Die distributiven Gesetze für $\vee$ und $\wedge$ . . . . .	327
§ 128. Die derivativen Verneinungsgesetze . . . . .	328
§ 129. Die wichtigsten derivativen Formen zum Tertium non datur. — Vorläufiger Ausblick . . . . .	331
§ 130. Die natürliche derivative Logik als „Aufgaben“-Logik . . . . .	334
§ 131. Die Derivate einer natürlichen Aussagenform . . . . .	337

## 7. Abschnitt.

**Normaldeduktive intuitionistische Aussagenlogik.**

<b>Kapitel XXIII. Die normaldeduktive Behandlung der intuitionistischen Aussagenlogik . . . . .</b>	<b>342</b>
§ 132. Einführendes . . . . .	342
§ 133. Normaldeduktive Kodifikation der intuitionistischen Aussagenlogik . . . . .	343
§ 134. Einige intuitionistische (nicht derivative) Herleitungen . . . . .	345
§ 135. Die gegenseitige Unabhängigkeit der intuitionistischen Axiome . . . . .	349
§ 136. Beispiele nichtintuitionistischer Wahrformen . . . . .	353
§ 137. Ein abgestuftes Axiomensystem der natürlichen alternären Aussagenlogik . . . . .	355
<b>Kapitel XXIV. Charakteristische Eigenschaften der intuitionistischen Aussagenlogik . . . . .</b>	<b>358</b>
§ 138. Die intuitionistische „Aufgaben“-Interpretation . . . . .	358
§ 139. Die Mittelstellung der intuitionistischen Aussagenlogik zwischen der derivativen und der alternären . . . . .	359
§ 140. Die intuitionistische Inabsurdität jeder Wahrform . . . . .	368
§ 141. Derivative und intuitionistische Logik keine „mehrwertigen“ Logiken . . . . .	369
§ 142. Das normaldeduktive $\wedge$ -Kodifikat der intuitionistischen Aussagenlogik . . . . .	372

## 8. Abschnitt.

**Aufschichtende derivative und intuitionistische Aussagenlogik.**

<b>Kapitel XXV. Die aufschichtende Behandlung der derivativen und der intuitionistischen Aussagenlogik . . . . .</b>	<b>375</b>
§ 143. Vorbemerkungen . . . . .	375
§ 144. Die aufschichtenden Kodifikate der natürlichen derivativen und der intuitionistischen Aussagenlogik . . . . .	376

	Seite
§ 145. Einige Herleitungen . . . . .	379
§ 146. Grundlegende Eigenschaften der neuen Kodifikate . . . . .	381
§ 147. Erster Vergleich mit der normaldeduktiven derivativen und intuitionistischen Aussagenlogik . . . . .	384
§ 148. Der Formelnbund in den neuen Kodifikaten . . . . .	386
§ 149. Umkehrbarkeit aufschichtender Schlüsse . . . . .	388
<b>Kapitel XXVI. Die Angemessenheit der aufschichtenden Kodifikate . . . . .</b>	<b>390</b>
§ 150. Schnittelimination . . . . .	390
§ 151. Die aufschichtenden Kodifikate als derivative bzw. intuitionistische . . . . .	394

## 9. Abschnitt.

**Handliches Entscheidungsverfahren für die natürliche derivative  
und intuitionistische Aussagenlogik.**

<b>Kapitel XXVII. Vorbereitung des Entscheidungsverfahrens . . . . .</b>	<b>397</b>
§ 152. Eine erste Modifikation der aufschichtenden $\rightarrow \forall \wedge$ -Kodifikate . . . . .	397
§ 153. Die verengten aufschichtenden $\rightarrow \forall \wedge$ -Kodifikate . . . . .	400
§ 154. Simplikation . . . . .	405
§ 155. Behandlung der disjunktiven Hauptvordglieder . . . . .	407
<b>Kapitel XXVIII. Das Entscheidungsverfahren . . . . .</b>	<b>409</b>
§ 156. Die dem Entscheidungsverfahren zugrunde liegende Reduktion . . . . .	409
§ 157. Vorbereitung des Nachweises der Entscheidbarkeit . . . . .	413
§ 158. Nachweis der Entscheidbarkeit. — Anmerkungen zur Verwendung des Verfahrens . . . . .	417
§ 159. Abkürzung des Entscheidungsverfahrens. Übersicht über das Verfahren . . . . .	421
§ 160. Anwendungsbeispiele zum Entscheidungsverfahren . . . . .	425

## 10. Abschnitt.

**Strikte Aussagenlogik.**

§ 161. Einführendes zur strikten Logik . . . . .	429
<b>Kapitel XXIX. Engere strikte Aussagenlogik . . . . .</b>	<b>430</b>
§ 162. Das Kodifikat der strikten Aussagenlogik . . . . .	430
§ 163. Erste Herleitungen aus den $\wedge \leftarrow$ -Axiomen St 1—6 allein . . . . .	433
§ 164. Einige Herleitungen aus den $\wedge \leftarrow \neg$ -Axiomen St 1—10 . . . . .	436
§ 165. Einbeziehung der Disjunktion. — Dualität . . . . .	440
§ 166. Fortsetzung der Herleitungen für die Disjunktion. Die strikte Logik als BOOLEscher Verband . . . . .	442
§ 167. Einbeziehung der alternären Implikation. — Einige Sätze über die strikte Beweisbarkeit . . . . .	446
§ 168. Fundamentale Umformungen der strikten Implikation. — Verträglichkeit . . . . .	449
<b>Kapitel XXX. Eine erste Erweiterung der strikten Logik . . . . .</b>	<b>452</b>
§ 169. Unabhängige Formen von striktem Charakter . . . . .	452
§ 170. Erweiterung durch ein zusätzliches Axiom . . . . .	456
§ 171. Weitere Herleitungen mit Heranziehung des neuen Axioms . . . . .	458
§ 172. Unabhängige Formen und Regeln . . . . .	462

## 11. Abschnitt.

**Strikte Aussagen- und Modalitätenlogik.**

Seite

Kapitel XXXI. Die Modalitäten „notwendig“ und „möglich“ in der strikten Logik . . . . .	464
§ 173. Strikt logische Möglichkeit und Notwendigkeit. Einführung . . . . .	464
§ 174. Erste Eigenschaften der strikt logischen Möglichkeit und Notwendigkeit	466
§ 175. Ableitung einiger Schlußregeln mit Heranziehung des Zusatzaxioms zur Hintergliedverjüngung . . . . .	470
§ 176. Weitere Herleitungen mit dem Zusatzaxiom der Hintergliedverjüngung	472
Kapitel XXXII. Die Modalitätenaxiome. Verschärfte strikte Logik . . . . .	477
§ 177. Notwendig-notwendiges. Einleitung . . . . .	477
§ 178. Erweiterung der strikten Modalitätenlogik durch das erste Modalitätenaxiom . . . . .	480
§ 179. Die 14 Hauptmodalitäten. Die Irreduzibilität der Kombinationen $\neg\Diamond$ und $\Diamond$ . . . . .	483
§ 180. Das zweite Modalitätenaxiom. „Verschärfte“ strikte Modalitätenlogik	489
§ 181. Die Einstufigkeit der verschärften strikten Logik . . . . .	494
§ 182. Die strikte Logik keine „mehrwertige“ Logik . . . . .	498
Kapitel XXXIII. Entscheidungsverfahren für die verschärfte strikte Logik .	500
§ 183. Modalprimitive Formen. Einführung . . . . .	500
§ 184. Eine Erweiterung der „spezifischen Quasiwahrheitswertung“ . . . . .	504
§ 185. Das Entscheidungsverfahren . . . . .	506
§ 186. Beweisbares als beweisbar-notwendiges . . . . .	509
§ 187. Weitere Anwendungsbeispiele für das Entscheidungsverfahren . . . . .	513
Kapitel XXXIV. Die Modalitäten „offen“ und „zufällig“ in der strikten Logik	517
§ 188. Die Offenheit. Grundsätzliches . . . . .	517
§ 189. Weitere Eigenschaften der Offenheit . . . . .	520
§ 190. Die Zufälligkeit. Grundsätzliches . . . . .	523
§ 191. Weitere Eigenschaften der Zufälligkeit . . . . .	525
§ 192. Vorläufiges Beispiel einer aussagenlogisch fundierten Theorie . . . . .	527
Übersicht über die logischen Zeichen . . . . .	530
Verzeichnis der wichtigsten numerierten Formen . . . . .	531
Literatur . . . . .	542
Sachverzeichnis . . . . .	545