

## INHALT

Vorwort . . . . .	9
Zur Einführung . . . . .	11

### ERSTER TEIL. DIE ZAHLEN

Erster Abschnitt. Das System der Zahlen . . . . .	23
<i>Einleitung.</i> Das Zählen . . . . .	23
A. Der Ausgang vom Leben . . . . .	23
B. Das Problem der Zählbarkeit . . . . .	25
C. Die Abstraktion . . . . .	27
D. Nicht „Veranschaulichung“, sondern Handeln . . . . .	29
<i>1. Kapitel.</i> Die natürlichen Zahlen . . . . .	31
<i>Einleitung.</i> Zahlen und Ziffern. Das Unendliche . . . . .	31
I. Die Gleichheit . . . . .	31
1. Zählzeichen, Ziffern, Zahlen 31 – Exkurs. Zahlennotierungen 34 – 2. Drei Zahlen. Komparativität 35	
II. Das Unendliche . . . . .	40
III. Der Aufbau der Ziffern . . . . .	43
IV. Die Zahlwörter . . . . .	44
A. Die Addition . . . . .	46
I. Kommutativität . . . . .	47
II. Assoziativität . . . . .	51
III. Rechtseindeutigkeit . . . . .	52

B. Die Subtraktion (vorläufig; ohne negative Zahlen) . . . . .	53
C. Die Multiplikation . . . . .	56
I. Kommutativität . . . . .	59
II. Assoziativität . . . . .	60
III. Rechtseindeutigkeit . . . . .	61
IV. Distributivität . . . . .	62
D. Die Division (vorläufig; ohne Bruchzahlen) . . . . .	63
E. Das Potenzieren . . . . .	66
F. Das Radizieren und Logarithmieren (vorläufig; ohne irrationale Zahlen) . . . . .	68
2. Kapitel. Die Erweiterung des Zahlenbereiches durch die unbeschränkte Ausführung der Umkehr-Operationen . . . . .	71
A. Die unbeschränkte Subtraktion . . . . .	71
I. Die negativen Zahlen . . . . .	71
II. Das Rechnen mit negativen Zahlen . . . . .	77
1. Addition und Subtraktion 77 – 2. Multiplikation und Division 81	
B. Die unbeschränkte Division . . . . .	85
I. Die Bruchzahlen . . . . .	85
II. Das Rechnen mit Bruchzahlen . . . . .	91
1. Addition und Subtraktion 95 – 2. Multiplikation und Division 96	
C. Das Potenzieren mit negativen und gebrochenen Exponenten . . . . .	102
I. Das Potenzieren als Setzen von Faktoren . . . . .	102
II. Das Rechnen mit negativen und gebrochenen Exponenten . . . . .	104
1. Negative Exponenten 104 – 2. Gebrochene Exponenten 105	
III. Das „Heruntertransponieren“ von Operationen durch das Rechnen mit Logarithmen . . . . .	106

3. Kapitel. Der Aufbau des Zahlensystems . . . . .	109
A. Die ganzen Zahlen . . . . .	109
B. Die rationalen Zahlen . . . . .	110
I. Der Zahlenstrahl . . . . .	110
II. Die Dezimalbrüche . . . . .	114
C. Die reellen Zahlen . . . . .	117
D. Die imaginären Zahlen . . . . .	122
E. Übersicht über das Zahlensystem . . . . .	123
F. Schlußbemerkung. „Natürliche“ Zahlen? . . . . .	124
Zweiter Abschnitt. Zahlenstrukturen . . . . .	127
A. Was sind Strukturen? . . . . .	127
B. Die wichtigsten Strukturen . . . . .	130
I. Strukturen mit nur <i>einer</i> Verknüpfung $+$ . . . . .	130
Die Gruppe 130	
II. Strukturen mit <i>zwei</i> Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ . . . . .	131
1. Der Ring 131 – 2. Der Körper 131	

ZWEITER TEIL. DIE MENGEN  
(MATHEMATISCHE MENGENLEHRE)

1. Kapitel. Die Einführung der Mengen . . . . .	135
A. Variable . . . . .	135
B. Von Termen zu Funktionen . . . . .	138
I. Terme . . . . .	138
II. Zu Funktionen durch Abstraktion aus Termen . . . . .	138

C. Von Formeln zu Mengen . . . . .	143
I. Formeln . . . . .	143
II. Zu Mengen durch Abstraktion aus Formeln . . . . .	144
D. Mathematische und außermathematische Mengenlehre . . . . .	147
2. Kapitel. Das „Rechnen“ mit Mengen . . . . .	149
A. Die Teilmengen-Beziehung . . . . .	150
I. Untermenge und Obermenge . . . . .	150
II. Mengen-Reflexivität und leere Menge . . . . .	151
III. Die Potenzmenge . . . . .	151
B. Die „Summen“mengen-Beziehung . . . . .	153
I. Der Durchschnitt . . . . .	153
II. Die Vereinigung . . . . .	154
Exkurs. Zugehörigkeitstabeln . . . . .	155
III. Das Rechnen mit Summenmengen . . . . .	158
1. Kommutativität 158 – 2. Assoziativität 159 – 3. Distribu-	
tivität 162	
C. Die Differenzmengen-Beziehung . . . . .	167
I. Die Komplementmenge . . . . .	170
II. Die Restmenge . . . . .	173
III. Das Rechnen mit Differenzmengen . . . . .	174
1. Idempotenz, leere Menge, Kommutativität, Distributivität 174	
– 2. Die Boolesche Summe 176 – 3. Die beiden de Morganschen	
Gesetze 176	
Anmerkungen . . . . .	180
Literaturverzeichnis . . . . .	181