

# INHALTSÜBERSICHT.

	Seite
Einleitung . . . . .	XXIII
<b>Erster Teil. Zur Theorie der Fiktionen.</b>	
<b>I. Die Fiktionen nach H. Vaihingers Phil. des Als-Ob</b>	<b>1</b>
Die Tatsache der Verwendung von Fiktionen in der Wissenschaft . . . . .	1
Psychologische Grundlegung . . . . .	2
Das gegebene Material 2. — Die Tätigkeit der Psyche 2. — Das logische Denken 2.	
Allgemeine Charakterisierung der Fiktionen . . . . .	3
Die fiktive Tätigkeit der Psyche als irreguläres Verfahren 3. — Semifiktionen und echte Fiktionen 4.	
Genauere Festlegung des Fiktionsbegriffs . . . . .	4
Die Bedeutungen, in denen der Fiktionsbegriff früher verwendet wurde 4. — Abgrenzung der Fiktion gegenüber der Hypothese 5. — Die sprachliche Form der Fiktion 6. — Ihre logischen Hauptmerkmale 6. — Das Gesetz der Ideenverschiebung 9.	
Zur Methodologie der Fiktionen . . . . .	9
Die Korrektur bei den Semifiktionen 9. — Die Methode der entgegengesetzten Fehler bei den echten Fiktionen 10.	
Erkenntnistheoretische Konsequenzen . . . . .	10
Die Natur des Denkens 10. — Bedeutung der Fiktionen für die Erkenntnis 11. — Wert dieser Erkenntnis 12.	
<b>II. Die Grundlagen der Vaihingerschen Fiktionslehre</b>	<b>13</b>
Was ist wirklich: . . . . .	13
A. Kritische Stellungnahme verschiedener Autoren zu Vaihingers Wirklichkeitsbegriff . . . . .	13
M. Kronenberg 13. — P. Schwartzkopff 14. — H. Scholz 18. — G. Jacoby 20. — P. Spickerbaum 21. — G. Spengler 22. — H. Kelsen 23. — O. Dittrich 23. — R. Schmidt 23.	
B. Die Abgrenzung des Wirklichen in den verschiedenen philosophischen Systemen . . . . .	26
Der Wirklichkeitsbegriff des extremen Empirismus . . . . .	26
Positivismus 26. — Kritischer Positivismus 28. — Psychomonismus 30. — Kritik des Positivismus durch M. Schlick 31.	

Der Wirklichkeitsbegriff des Idealismus und der Neukantianer . . . . .	32
Plato, Fichte, Hegel 32. — Marburger Schule; Cohen und Natorp 33. — Zur Kritik dieses Wirklichkeitsbegriffs 34. — Das Wirkliche in der Philosophie Rickerts 35. — Külpe 36. — Kritik von Volkelt 37.	
Der Wirklichkeitsbegriff bei Kant. . . . .	37
Der Wirklichkeitsbegriff des Realismus . . . . .	39
Naiver Realismus 39. — Transzendentaler Realismus 40. — E. v. Hartmann; J. Volkelt 40. — E. Studys Auffassung 43. — M. Schlick über den Wirklichkeitsbegriff 43.	
C. Die empiristische Wirklichkeit und die mathematische Existenz . . . . .	46
A. Müllers Umgrenzung des Wirklichen . . . . .	46
E. Husserls phänomenologische Philosophie . . . . .	47
Tatsachenwissenschaften und Wesenswissenschaften 47. — Die Mathematik als reine Wesenswissenschaft 49. — Husserls Kritik am Empirismus und Idealismus 50. — Die natürliche Einstellung 51. — Die Einklammerung; das Bewußtsein als phänomenologisches Residuum 51. — Bewußtsein und Realität 52. — Die Mathematik als eidetische Wissenschaft und ihr Gegensatz zu den empirischen Wissenschaften 54.	
Der Konventionalismus; Axiome sind Definitionen . . . . .	55
Definition der mathematischen Existenz bei Poincaré 55.	
Dedekinds Standpunkt: Zahlen freie Schöpfungen des Geistes . . . . .	56
Wundts Ansicht: Nicht völlige Neuschöpfungen, sondern willkürliche Veränderungen; Anknüpfung an empirische Daten . . . . .	57
Freges Stellung zu den mathematischen Definitionen und der mathematischen Existenz . . . . .	57
Weyl: Gegensatz zum Konventionalismus . . . . .	58
Die Natur der mathematischen Voraussetzungen beim mathematischen Realismus und beim Nominalismus nach Wundt. . . . .	59
III. Die Grundlagen der Vaihingerschen Fiktionslehre; Fortsetzung . . . . .	60
Was ist Wahrheit? . . . . .	60
Zum Wahrheitsbegriff Vaihingers . . . . .	60
R. Schmidt 60. — Der Perspektivismus bei Vaihinger	

und Nietzsche 61. — Der pragmatistische Wahrheitsbegriff (Scholz) 62.	
Das Wahrheitsproblem nach A. Lapp . . . . .	63
Ablehnung der Theorien von Rickert und Husserl 63 und 64. — Zustimmung zum Vaihingerschen Wahrheitsbegriff 65. — Die Wahrheit als Fiktion 66.	
Das Wahrheitsproblem nach J. Volkelt . . . . .	67
Kritik des anthropologischen Wahrheitsbegriffs 67. — Kritik und Ablehnung der Denkimmanenz 67. — Die Wahrheit und das Nichtseiende 68. — Das transzendente Sollen 69. — Definition des Wahrheitsbegriffs bei Volkelt 70 und 71. — Betonung der subjektiven und objektiven Seite 71. — Das Absolute im Wahrheitsbegriff 72. — Strenge Scheidung der Relativität des Erkennens von derjenigen der Wahrheit 73. — Ablehnung der Philosophie des Als-Ob durch Volkelt 73.	
Kritische Stellung von H. Meier zur Annahme absoluter Wahrheiten . . . . .	73
Seine Definition des Wahrheitsbegriffs 74. — J. Volkelt zur Auffassung von H. Meier 77.	
Freges Ablehnung des Psychologismus . . . . .	78
Übereinstimmung mit Husserl 78. — Anerkennung eines Objektiven, Nichtwirklichen 78.	
Definition des Wahrheitsbegriffs bei Schlick . . . . .	79
Seine Ablehnung der Abbild-Theorie 79. — Stellungnahme hierzu 80.	
<b>IV. Zur Kritik des Vaihingerschen Fiktionsbegriffs .</b>	<b>81</b>
Kritik an einzelnen Merkmalen . . . . .	81
Das Verhältnis zur Wirklichkeit . . . . .	81
Kritik von Spickerbaum und sein Fiktionsbegriff 81 und 82. — O. Dittrichs relative Wirklichkeit 82. — Die Behauptung des Widerspruchs zur Wirklichkeit ist nach W. Jerusalem ein Irrtum 82.	
Die Fiktion eine bewußte Bildung. . . . .	82
Dempwolff bestreitet die Notwendigkeit dieses Merkmals 83. — Nach W. del Negro gibt es auch unbewußte Fiktionen, die Wissenschaft hat es aber nur mit bewußten zu tun 83. — B. Fließ sieht im Bewußtsein der Metapsyche den eigentlichen Schöpfer der Fiktionen 84.	
Die Korrektur . . . . .	84
Nach W. Strauch fehlt dieses Merkmal bei den juristischen Fiktionen 84.	

Die Zweckmäßigkeit ist nach Coerper kein Begriff des Wirklichen, sondern des reinen Denkens; der Kernbegriff des Fiktionalen . . . . . 85

Umfassendere kritische Stellungnahme . . . . . 85

E. Boermas logische Theorie der Fiktionen . . . . . 85

Zurückführung der echten Fiktionen auf Semifiktionen 85. — Betonung des fiktiven Urteils 85. — Die relative Fiktivität 86. — Das Prinzip der entgegengesetzten Fehler 86. — Das fiktive System und die regularisierte Schlußkette 86 und 87. — 2 Thesen Boermas zum fiktiven System 87. — Allgemeine Stellungnahme Boermas 88.

R. Schmidts Ausführungen zum Fiktionsbegriff . . . . . 88

Statt bewußt falsch soll logisch indifferent gesetzt werden 88. — Beziehung zur Neutralitätsmodifikation bei Husserl 89. — Aufgaben für die Gegenwart 89.

Beziehungen der Fiktionen zu den Annahmen Meinongs . . . . . 89

Charakterisierung der Annahme bei Meinong (n. Sperl) 90. — Die Definition Spenglers 90. — Einteilung der Annahmen nach Sperl 91. — Einteilung der Annahmen nach Spengler 92. — Das Verhältnis der Vaihingerschen Fiktionen zu den Annahmen Meinongs (nach Spengler) 93. — Nicht Urteile sollen fiktiv genannt werden, da nur ein Teil derselben eine Fiktion ist 93. — Kritische Stellungnahme Spenglers 94.

Definitionen des Fiktionsbegriffs, die von Vaihingers Fassung wesentlich abweichen . . . . . 95

Tischer: Fiktionen-Idealisierungen; Produkte unserer Spontaneität 95. — A. Müllers Kritik des Vaihingerschen Wahrheitsbegriffs und seine Definition der Fiktion 95 und 96. — Studys Auffassung 96. — B. Russell 96. — J. Schultz: Einteilung der Fiktionen 97. — Charakterisierung der Fiktion bei Schultz 98.

V. Stellungnahme zum Vorhergehenden; verschiedene mögliche Formen des Fiktionsbegriffs . . . . . 99

Der Begriff des Wirklichen . . . . . 99

Das Merkmal des Widerspruchs . . . . . 99

Die Auffassungen hinsichtlich der logischen Sätze 100. — Logische Indifferenz mancher Fiktionen 102. — Denken und Sein in verschiedenen erkenntnistheoretischen Systemen 102 f. — Muß man sich der Fiktivität bewußt sein? 104 f.

Die Korrektur . . . . . 106

Korrektur bei den Semifikationen 107. — Zur Methode der entgegengesetzten Fehler 108. — Konsequenzen dieser Kritik 108. — Verhältnis des dritten Merkmals zum ersten 109.

Die Frage der Zweckmäßigkeit, insbesondere in der Mathematik . . . . .	109
Über die sprachliche Form der Fiktionen . . . . .	110
Zur Aufstellung einer Fiktionentafel . . . . .	110
1. Gruppe charakterisiert durch das Merkmal „unwirklich“	111
Fiktion $A_1$ , bezogen auf den positivistischen Wirklichkeitsbegriff 111. — Fiktion $A_2$ , bezogen auf den realistischen Wirklichkeitsbegriff 112. — Fiktion $A_3$ , bezogen auf den idealistischen Wirklichkeitsbegriff 114. — Fiktion $A_4$ , freie Phantasieschöpfungen nach Husserl 114.	
Bedenken gegen einzelne dieser Typen . . . . .	115
2. Gruppe; Definition des Eigenbereichs einer Wissenschaft	116
Die Fiktion festgelegt in bezug auf den Eigenbereich 116. — Die Typen $B_1$ und $B_2$ 116. — Beziehungen zur 1. Gruppe 117. — Vaihingers Stellung 117.	
Logische Fundierung des Fiktionsbegriffs . . . . .	118
3. Gruppe . . . . .	118
Der Standpunkt des absoluten Empirismus führt zum Typus $C_1$ 118. — Der Standpunkt des Anthropologismus zu $C_2$ 119. — Vom konventionalistischen Standpunkt aus ergeben sich: Typus $C_3$ provisorische Bildungen 120. — Typus $C_4$ logisch neutrale Bildungen 120. — Typus $C_5$ logisch falsche Bildungen 120. — Typus $C_6$ primitive Systeme, bei denen eine Entscheidung unmöglich ist 121.	
4. Gruppe: Vom aprioristischen Standpunkt in der Logik aus ergeben sich . . . . .	122
Typus $D_1$ ; die logische Stellung der Gebilde, ihre Widerspruchslösigkeit ist noch nicht erwiesen 122. — Typus $D_2$ ; bewußt falsche Bildungen 122.	
Methodologische Festlegung der Fiktion . . . . .	123
Fiktion E; Methode der entgegengesetzten Fehler 123.	
Die Vaihingersche „wissenschaftliche Fiktion“ F . . .	124

## Zweiter Teil. Fiktionen in der Mathematik.

I. Die mathematischen Fiktionen in der Philosophie des Als-Ob . . . . .	125
Die Grundbegriffe der Geometrie und der Arithmetik .	125

Ihr Verhältnis zur empirischen Wirklichkeit — sie sind unwirklich 126. — Das kartesianische Koordinatensystem und die Hilfslinien der Elementargeometrie nur provisorische Hilfsgebilde, daher fiktiv 127. — Zählen und Messen auf Fiktionen beruhend 128. — Betonung der freien imaginativen Tätigkeit 128. — Die mathematischen Gebilde nur Abstraktionen 129. — Nichtwirklich-subjektiv-fiktiv-widerspruchsvoll 129.

Die Fiktion des absoluten Raumes . . . . . 130

Raum kein empirischer Gegenstand, kein Faktum; aber auch keine Hypothese 130. — Der Streit zwischen Leibniz und Clarke zu lösen durch eine methodologische Unterscheidung. Der Raum eine Fiktion 131. — Ansichten von Malebranche und Suarez 131. — Absoluter Raum — unberechtigte Übertragung 132. — Die Formen des Problems des absoluten Raums 132. — Der reine mathematische Raum 133. — Übertragung auf Raumteile und mathematische Körper 134.

Mathematische Fiktionen, die auf abstrakter Verallgemeinerung und unberechtigter Übertragung beruhen . 136

Geometrien von mehr als drei Dimensionen 136. — Die Erweiterungen des Zahlbegriffs 136. — Die imaginären Zahlen 137. — Betonung des Widerspruchsvollen und der Methode entgegengesetzter Fehler 138. — Elementarmethoden. Auflösung der kubischen und der quadratischen Gleichungen 139.

Die Fiktion des Unendlich-Kleinen . . . . . 141

Die sog. Nullfälle-Subsumtion des Kreises unter die Ellipse 141. — Die Berechnung krummlinig begrenzter Flächenstücke 143. — Die Infinitesimalmethode 144. — Fermats Maximumproblem 145. — E. Boermas Kritik der Vaihingenschen Auffassung 146. — Das Linien-element  $ds$  und die Differentiale  $dx$  und  $dy$  147. — Die Infinitesimalrechnung ein kunstreicher Mechanismus, auf der Methode entgegengesetzter Fehler beruhend 148.

Die Behandlung der mathematischen Fiktionen bei W. Dieck 149

II. Die Grundbegriffe der Geometrie . . . . . 151

Hinweis Vaihingens auf die Ausführungen von Pasch in Mathematik und Logik . . . . . 151

Die Ansichten von Pasch, dargestellt auf Grund seiner mathematischen Abhandlungen . . . . . 152

Sein Ziel 152. — Empiristische Einstellung 153. — Teilung der Geometrie in Unterbau und Oberbau 153. — Die herkömmliche Geometrie ohne Unterbau, der Punkt dann ein hypothetischer Begriff 154. — Forderung

- eines Unterbaus, dabei Geometrie als Erfahrungswissenschaft zu behandeln 154. — Zweck dieser empiristischen Fundierung; Sicherung der inneren Folgerichtigkeit und der Anwendbarkeit 155. — Widerspruchslose Geometrie auch ohne Unterbau möglich 155. — Unterschied zwischen Geometrie und Zahlenlehre 156. — Geometrie auf die Zahlenlehre zu gründen, der Kern der Arithmetik aus sich selbst heraus zu beurteilen 156. — Die Axiome und die mathematischen Begriffe 156. — Explizite und implizite Definitionen 157. — Bedeutung der Begriffserweiterungen 159.
- Das mathematische Verfahren . . . . . 159
- Reine Deduktion 159. — Zweck des mathematischen Beweises 160. — „Derbe“ und „heikle“ Mathematik 161. — Freiheit für die Forschung 161. — Die Sicherung der Widerspruchslosigkeit eines Kerns 161.
- Mit welchem Recht beruft sich H. Vaihinger auf M. Pasch?** 162
- Pasch gegen unpräzise Begriffsbildungen 163. — Begriffserweiterungen von Pasch zugelassen, aber widerspruchsfreie Begründung verlangt 164. — Die Begriffe „Raum“ und „Dimension“ nach Pasch überflüssig 165. — Einseitige Auffassung der Polemik von Pasch 165. — Statt entgegengesetzter Fehler verlangt Pasch widerspruchsfreien Aufbau 166. — Wie ist der Ausdruck hypothetische Geometrie zu verstehen? 167. — E. Study und R. Schmidt über Fiktion und Hypothese 169. — Pasch und Vaihinger; Zusammenfassung 169.
- Die Geometrie der Wirklichkeit von Hjelmselev . . . . 171
- Der mathematische Punkt ein illusorischer Grundbegriff 171. — Ganz andere Problemstellung 171.
- Das Wesen der mathematischen Erkenntnis nach E. Müller** 172
- Aussagen über fiktive bzw. idealisierte Dinge 173. — Gewinnung mathematischer Erkenntnisse durch Gedankenexperimente 174. — Intuitive Überzeugung ein psychologischer Irrtum 174. — Unterscheidung der Mathematik von anderen Wissenschaften nicht durch ihr Verfahren, sondern durch ihren Gegenstandsbereich; Fiktionen oder Idealisierungen 175.
- O. Hölders Standpunkt** . . . . . 175
- Unterscheidung von Grundbegriffen und synthetischen Begriffen 176. — Rolle der Anschauung in der Geometrie 176. — Geometrie und Erfahrung 177. — Die Axiome und die exakten Begriffe der Mathematik 177. — Auffassung von F. Klein 178.
- Aprioristische Auffassung der geometrischen Axiome** . . 178

L. Nelson über die geometrischen Axiome 178. — G. Heymans' Standpunkt 179. — Seine Auffassung der Ergebnisse der Forschungen von Riemann und Helmholtz 180. — Stellung zur Euklidischen Geometrie 181. — Die Hypothese Riehls 183.

Phänomenologische Begründung der Geometrie von O. Becker 183

Der Konventionalismus . . . . . 186

Couturat betont den rein logischen Charakter der Geometrie 186. — Die Axiome Definitionen 186. — H. Reichenbachs Auffassung 187. — M. Schlick: Axiome implizite Definitionen der Grundbegriffe 189. — Bedeutung der Forderung der Widerspruchslosigkeit 190.

Ablehnung des Konventionalismus . . . . . 191

H. Weyls Ansicht über die Axiome 191. — Bedeutung der natürlichen Zahlen 192. — Studys Ablehnung der Axiomatik, Forderung des Aufbaus der Geometrie auf der Zahlenlehre 192.

Ergebnisse der Untersuchungen des 2. Kapitels . . . . . 193

Allgemeine Forderung der Widerspruchslosigkeit 193. — Die Frage nach der Existenz der Grundgebilde: empiristischer, realistischer, idealistischer, konventionalistischer Standpunkt 193. — In welchem Sinn kann man von Fiktionen reden? 194. — Stellung zu den geometrischen Axiomen 195.

### III. Vergleich verschiedener geometrischer Systeme unter dem Gesichtspunkt der Transformationsgruppe . . 197

Systeme Nichteuklidischer Geometrie . . . . . 197

Das Kleinsche Klassifikationsprinzip . . . . . 198

Die Begriffe: Mannigfaltigkeit von  $n$  Dimensionen, Element, Gruppe 199. — Beispiele von Gruppen 199. — Die Hauptgruppe 200. — Verallgemeinerung: Umfassendere Gruppen, Erweiterung des Begriffs der geometrischen Größe 200. — Charakterisierung der geometrischen Systeme durch ihre Gruppen 201.

Allgemeine Sätze . . . . . 202

Übergang zu einer Untergruppe, oder zu einer umfassenderen Gruppe 202. — Übertragungen 203.

Charakterisierung bekannter geometrischer Systeme . . 203

Elementare Geometrie 203. — Projektive Geometrie 203. — Die Metrik in der projektiven Geometrie 204. — Cayleys Forschungsergebnisse 205. — Die klassische und die neue Mechanik 206. — Projektive Behandlung der Mannigfaltigkeit von  $n$  Dimensionen 207. — Beltramis Untersuchungen 208. — Die Geometrie der reziproken



Radien 208. — Die Liniengeometrie 209. — Allgemeine Gruppen von Punkttransformationen 209. — Die rationalen Umformungen 209. — Analysis situs 210. — Gruppe aller Punkttransformationen 210. — Punkttransformationen im $\infty$ kleinen Gebiet des Raums 210. Die Gruppe aller Berührungstransformationen 210.	
Stellungnahme zum Fiktionsproblem . . . . .	211
Vom Standpunkt der reinen Mathematik aus 211. — Vom Standpunkt der angewandten Mathematik aus 214.	
<b>IV. Die natürlichen Zahlen . . . . .</b>	<b>217</b>
Einleitung . . . . .	217
Der dogmatische Standpunkt Kroneckers 217. — Der empiristische Standpunkt von St. Mill und Helmholtz 217.	
Die Begründung der Zahlenlehre bei M. Pasch . . . . .	217
Zurückführung auf einen Kern 218. — Ausgangspunkt die Begriffe, die sich auf die Reihenfolge beziehen 218. — Die Kernbegriffe der Arithmetik 219.	
Die Auffassung von G. Heymans . . . . .	219
Ablehnung der empiristischen Fundierung 219. — Die Zahlenreihe ein Produkt willkürlicher Festsetzungen 220. — Die Sätze der Arithmetik analytische Urteile 220. — Einwand von König 220. — Zur Kritik des Heymannsschen Standpunkts 221. — Unterscheidung der synthetischen bzw. analytischen Natur abgeleiteter Sätze von derjenigen von Grundsätzen 222. — Welchen Forderungen muß ein Axiomensystem genügen? 223.	
Versuche, die Zahlenlehre rein logisch zu begründen . . . . .	224
G. Frege . . . . .	224
R. Dedekind . . . . .	224
Russells Theorie der natürlichen Zahlen . . . . .	224
Die Resultate Peanos 225. — Logisierung der Mathematik durch Russell 226. — Definition der Zahl 226. — Der Begriff der Menge 226. — Die Definition der Grundbegriffe: Zahl, 0, Nachfolger 227. — Die Grundsätze Peanos beweisbare Sätze 228. — Der Reihencharakter der natürlichen Zahlen 229. — Die Beziehungen 229. — Zusammenfassung 230.	
G. Hessenberg über den Sinn der Zahlen . . . . .	231
Beziehungen 231. — Mengen 232. — Anzahlen 232. —	
Natorps Theorie der Zahlen . . . . .	234
Die Grundreihe 235. — Unterscheidung des genetischen und ontischen Sinnes der Zahlsetzung 235. — Ablehnung der Fundierung der Zahl auf den Begriff der	

Menge 235. — Die Normalreihe von Lipps 236. — Kritik der Auffassung Freges durch Natorp 237. — Kritik der Dedekindschen Theorie 238. — Begründung der Grundoperationen der Arithmetik 239.

Die Zahlenlehre von O. Hölder . . . . . 240  
 Strenge Unterscheidung der Zahl als Anzahl und als Glied einer Reihe 240. — Definition der Grundoperationen der Arithmetik 241. — Die Grundtatsache des Anzahlbegriffs 241.

H. Weyls Ablehnung des konventionalistischen Standpunkts 242  
 Die Anschauung der Iteration 242. — Charakterisierung der natürlichen Zahlen 243. — Das Iterationsprinzip 244. — Begriff der Anzahl 244.

Axiomatische Begründung der Zahlenlehre durch D. Hilbert 245  
 In welchem Sinn kann man bei den natürlichen Zahlen von Fiktionen sprechen? . . . . . 247

V. Die Erweiterungen des Zahlbegriffs . . . . . 250

A. Die rationalen Zahlen . . . . . 250

Natorps Auffassung — Keine Erweiterung des Zahlbegriffs 250

Russell führt die rationalen Zahlen nicht auf Mengen, sondern auf Beziehungen zurück . . . . . 251

Hölders abstrakte Begründung . . . . . 252

Hessenbergs Definition der gebrochenen Zahlen . . . . . 254

Weyls Auffassung . . . . . 255

Relationen zwischen natürlichen Zahlen 255. — Die gebrochenen Zahlen gehen den rationalen voraus 256.

Die Ansicht von Heymans über die Zahlerweiterungen . . . . . 257

B. Die irrationalen Zahlen . . . . . 260

Die Theorie von Dedekind . . . . . 260

Der Grund zu ihrer Einführung 260. — Einteilungen der rationalen Zahlen in zwei Klassen 262. — Definition des Schnitts 263. — Die drei Arten von Schnitten 263. — Die fundamentalen Operationen mit Schnitten 264. — Die Axiome der Arithmetik der rationalen Zahlen 265. — Diese Axiome sind auch für Schnitte erfüllt 266. — Rationale und irrationale — reelle Zahlen 267. — Der Grenzwert 267.

Die Cantorsche Theorie der Irrationalzahlen . . . . . 269

Die Theorien von Heine und Thomae 270. — Die Theorie von Bachmann 272.

Russells Auffassung der irrationalen Zahlen . . . . . 272

Die Begriffe „Maximum“ und „obere Grenze“ 272. — Das Segment 273.

	Seite
Natorps Kritik der Irrationalzahltheorien . . . . .	274
Irrationalzahlen und Stetigkeit 275. — Stellungnahme zu Natorps Auffassung 276. — Trennung der Definition des Irrationalen von der der Stetigkeit 277. — Natorps Hinweis auf Veronese 278.	
C. Die imaginären und die komplexen Zahlen . . . . .	280
Verzicht auf eine eigentliche Begründung . . . . .	280
Rein formalistische Einführung — Symbole, die den formalen Gesetzen der Arithmetik genügen . . . . .	280
Auffassung der komplexen Zahlen als einer speziellen Art extensiver Größen. — Paare reeller Zahlen . . . . .	281
Begründung durch Positionsbeziehungen . . . . .	282
Natorp 282. — Schefflers Situationskalkül 283.	
Verallgemeinerung der gewöhnlichen komplexen Zahlen . . . . .	284
Hamiltons Quaternionen 284. — Die extensiven Größen Graßmanns 284. — Die Nichtarchimedischen Größen 284.	
Die Frage nach der Fiktivität bei diesen Zahlerweiterungen . . . . .	285
Sind es legitime, widerspruchsfreie Bildungen? 286. — Natorps Auffassung der imaginären Zahlen 286. — Zahlerweiterungen zwar widerspruchsfrei, aber bloßer Formalismus 287. — Ablehnung der Zahlerweiterungen durch Heymans 287. — Whiteheads Ansicht 287. — Die Auffassung von A. Schuster 288.	
Zusammenfassung . . . . .	288
VI. Das Unendliche in der Mathematik . . . . .	289
Das Unendlich-Kleine bei den sog. 0-Fällen . . . . .	289
Subsumtion des Kreises unter die Ellipse 289. — Der Grenzprozeß beim Übergang der Kreissekante in die Tangente 290.	
Die Verwendung uneigentlicher Elemente . . . . .	291
Der $\infty$ ferne Punkt der Geraden: vom elementargeometrischen Standpunkt aus 291; vom projektivischen Standpunkt aus 292. — Die Frage der Fiktivität uneigentlicher Elemente 294.	
Die Berechnung krummlinig begrenzter Flächenstücke . . . . .	295
Der Begriff des Grenzwertes einer Reihe 295. — Die Wertereihen der Inhalte der dem Kreis ein- und umbeschriebenen regulären Polygone bei wachsender Seitenzahl 298. — Der Kreisinhalt als ihr gemeinsamer Grenzwert 298. — Die Zahl $\pi$ 299. — Die unendlichen Reihen 300. — Die erschöpfende Teilung (Exhaustion) 301. — Andere Darstellung der Zahl $\pi$ und der Kreisfläche 302. — Kritische Bemerkungen 302.	

Die Differentialrechnung . . . . . 304

Der Begriff der Funktion 304. — Verlauf einer Funktion 304. — Grenzwerte der Funktion bei Annäherung der  $x$ -Werte an einen bestimmten Wert 304. — Die Symbole  $\pm \infty$  und ihre Bedeutung 305. — Differentiierbarkeit einer Funktion und Ableitung 306. — Unterscheidung von Stetigkeit und Differentiierbarkeit 307. — Die Parabeltangente 307. — Das Fermatsche Maximumproblem 308. — Differentiale und Differentialquotient 312.

VII. Das Unendliche in der Mathematik (Fortsetzung) 313

Die Mengenlehre . . . . . 313

Die Cantorsche Mengenlehre . . . . . 313

Definition der Menge 313. — Die Grundbegriffe der transfiniten Mengenlehre 313. — Begründung der endlichen Zahlenlehre aus denselben Prinzipien 313. — Sätze über transfiniten Mengen 314. — Theorie der Ordnungstypen 314. — Die Paradoxien der Mengenlehre 315.

Die Darstellung der Mengenlehre bei G. Hessenberg . . 316

Kritik des Mengenbegriffs 316. — Das Problem der logischen Vollständigkeit und Entscheidbarkeit 316. — Die Paradoxien 317. — Prinzipien der Mengenlehre 319. — Das Auswahlprinzip 319. — Die Erzeugungsprinzipien 320. — Zum Induktionsschluß 322. — Ergebnisse: zwei Thesen 322

Die Versuche einer Begründung der Analysis und Mengenlehre auf rein logischer Basis von Frege und Russell . . 324

Die Axiomatik von Zermelo . . . . . 325

Das Auswahlpostulat 325. — Zur Widerspruchslosigkeit der Zermeloschen Axiome 326.

Kritik der Mengentheorien durch Poincaré . . . . . 327

Forderungen, denen Axiomensysteme genügen müssen 327. — Ablehnung der Begründung der Mathematik auf Logik allein 328. — Zur Logik Russells 328. — Prädikative und nichtprädikative Definitionen 329. — Wohlbestimmte und nichtwohlbestimmte Klassifikationen 330. — Circulus vitiosus 331. — Zulässige und unzulässige Definitionen 332. — Gegensatz der Pragmatiker und Cantorianer 332.

H. Weyls Theorie des Kontinuums . . . . . 335

Seine Definitionsprinzipien 335. — Prinzipien der Urteils kombination 335. — Die Begriffe der Menge und des funktionalen Zusammenhangs 336. — Konsequenzen für Analysis und Mengenlehre 337. — Beschränkung des Existenzbegriffs auf die Grundkategorien 338.

	Seite
Die intuitionistische Mengenlehre von Brouwer und Weyl	339
Vertreter des axiomatischen Standpunkts . . . . .	343
Schönflies 344. — Fraenkel 344. — v. Neumann 345.	
Die axiomatische Begründung der Mathematik durch Hilbert und Bernays . . . . .	345
D. Hilbert über das Unendliche . . . . .	351
Zur Frage der Fiktionen . . . . .	354
Schlußwort . . . . .	356
Anmerkungen . . . . .	358
Literatur . . . . .	367

