

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Kapitel VII Logik	1
§ 1 Die Logik in ihrer geschichtlichen Entwicklung	1
1.1 Die Logik in Antike und Scholastik	2
1.2 Das Aufkommen der modernen Logik	8
§ 2 Junktoren: Aussagenlogik	12
2.1 Junktoren und Wahrheitstafeln	12
2.2 Der Bau von Theorien	15
2.2.1 Semantische Deduktion	16
2.2.2 Syntaktische Deduktion	17
2.2.3 Das Verhältnis von semantischer und syntaktischer Deduzierbarkeit (Wahrheit und Beweisbarkeit)	19
2.2.4 Widerspruchsfreiheit	19
2.2.5 Entscheidbarkeit	20
2.2.6 Die Schichtung der Meta-Ebenen	20
§ 3 Junktoren plus Quantoren: Prädikatenlogik	20
3.1 Variable und Prädikate: Allgemeines	23
3.2 Bildung der WFF	25
3.3 Semantische Deduktion	26
3.4 Syntaktische Deduktion	27
3.5 Das Verhältnis von semantischer und syntaktischer Deduzierbarkeit in der Prädikatenlogik	27
§ 4 Gödels Unvollständigkeitstheorem (1931)	28
4.1 Entscheidbarkeit	30
4.2 Unentscheidbare Prädikate	31
4.3 Das Gödelsche Prädikat	35
4.4 Unvollständigkeit	36
4.5 Auswirkungen auf die Widerspruchsfreiheit-Problematik	36
Kapitel VIII Mengen, Abbildungen, Relationen	39
§ 1 Der Begriff der Menge	39
§ 2 Die übliche Art, mit Mengen umzugehen	40
2.1 Wie man einzelne Mengen definiert und bezeichnet	40
2.2 Binäre Beziehungen zwischen Mengen	43
2.3 Komplementbildung	44
2.4 Die Potenzmenge einer Menge	45
2.5 Hüllenbildungen	45

§ 3	Abbildungen	47
3.1	Cartesische Produkte	49
3.2	Das Hintereinanderschalten von Abbildungen	51
3.3	Mächtigkeiten	52
§ 4	Relationen	56
§ 5	Das Auswahlaxiom, der Wohlordnungssatz und das Zornsche Lemma	68
§ 6	Axiomatische Mengentheorie	74
Kapitel IX Zahlen und algebraische Strukturen		78
§ 1	Die natürlichen Zahlen: \mathbb{N}	80
1.1	Fassungen des Induktionsprinzips	89
1.2	Plausibilität des Induktionsprinzips	91
§ 2	Die ganzen Zahlen: \mathbb{Z}	94
§ 3	Die rationalen Zahlen: \mathbb{Q}	96
§ 4	Die reellen Zahlen: \mathbb{R}	99
§ 5	Die komplexen Zahlen: \mathbb{C}	105
§ 6	Die nonstandard-Erweiterungen des Körpers der reellen Zahlen	109
6.1	Ultrafilter in \mathbb{N}	110
6.2	Konstruktion des (nonstandard-Erweiterungs-)Körpers $\mathbb{R}^* \supseteq \mathbb{R}$	111
6.3	Das Übertragungsprinzip	115
6.4	Nonstandard-Modelle der natürlichen Zahlen	116
§ 7	Zahlentheorie und Algebra	116
7.1	Teilbarkeit	117
7.2	Primzahlen	119
7.3	Elementare Zahlentheorie	129
7.3.1	Der chinesische Restsatz	129
7.3.2	Das Fermat-Problem	130
7.3.3	Warings Problem	132
7.3.4	Transzendente Zahlen	133
7.4	Algebraische Zahlkörper	138
7.5	Kryptographie	141
§ 8	Algebraische Strukturen	148
8.1	Vektorräume	148
8.2	Überblick über einige algebraische Strukturen	162
8.2.1	Halbgruppen	162
8.2.2	Gruppen	163
8.2.3	Ringe	164
8.2.4	Algebren	165
8.2.5	Verallgemeinerungen	165

Kapitel X Allgemeine Betrachtungen zur Mathematik	167
§ 1 Was ist Mathematik?	167
1.1 Abgrenzung der Mathematik gegenüber anderen Kulturbetätigungen	167
1.2 Der naive Platonismus der Mathematiker	169
1.3 Die Mathematik als Wissenschaft vom Unendlichen	171
1.4 Das Zirkularitäts-Problem der Mathematik	174
§ 2 Wie geschieht Mathematik?	176
2.1 Der einzelne Mathematiker	176
2.2 Mathematiker untereinander	182
2.3 Mathematiker und Nichtmathematiker	184
§ 3 Die Mathematik und die Wissenschaften	185
§ 4 Die Mathematik in ihrer geschichtlichen Entwicklung	191
4.1 Antike	192
4.2 Mittelalter	198
4.3 Die Epoche von 1500–1800	200
4.4 Das 19. Jahrhundert	207
4.5 Das 20. Jahrhundert	211
Literaturverzeichnis	229
Register	239