

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

| | |
|--|----|
| Kapitel I Geometrie | 1 |
| § 1 Einige klassische Sätze der euklidischen Geometrie | 2 |
| 1.1 Der Umfangwinkelsatz und der Thaleskreis | 2 |
| 1.2 Der Satz von Pythagoras | 3 |
| 1.3 Der Satz vom Höhenschnittpunkt | 5 |
| 1.4 Der Feuerbachsche Neunpunktekreis | 6 |
| 1.5 Die regulären Polyeder | 7 |
| § 2 Mögliche und unmögliche Konstruktionen | 8 |
| 2.1 Die Quadratur des Kreises | 8 |
| 2.2 Die Konstruktion des regelmäßigen n -Ecks | 10 |
| 2.3 Die Dreiteilung des Winkels | 11 |
| 2.4 Die Verdopplung des Würfels | 12 |
| 2.5 Fragen der Zerlegungsgleichheit | 13 |
| § 3 Bewegungsgruppen | 13 |
| 3.1 Decktransformationen geometrischer Figuren | 14 |
| 3.2 Die Klassifikation der Symmetriegruppen: Ornamente und Kristalle | 20 |
| § 4 Systematisierung der Geometrie | 24 |
| 4.1 Der axiomatische Aufbau der euklidischen Geometrie | 24 |
| 4.2 Das Parallelenpostulat und die nichteuklidische Geometrie | 26 |
| 4.3 Analytische Geometrie | 29 |
| 4.4 Projektive Geometrie | 31 |
| 4.5 Die gruppentheoretische Systematik der Geometrie: Felix Kleins Erlanger Programm (1872) | 33 |
| § 5 Ausblick | 34 |

Kapitel II Elemente der Algebra

36

| | |
|---|----|
| § 1 Die vier Grundrechnungsarten und der Begriff des Körpers | 37 |
| § 2 Quadratwurzeln | 44 |
| § 3 Die mathematische Problematik des Wurzelziehens | 46 |
| 3.1 Die Unmöglichkeit von $\sqrt{2}$ in \mathbb{Q} | 46 |
| 3.2 Quadratische Körpererweiterung | 49 |
| § 4 Das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen | 51 |

| | |
|--|----|
| Kapitel III Vollständige Induktion | 59 |
| § 1 Drei Summationen | 60 |
| 1.1 Arithmetische Progressionen | 60 |
| 1.2 Geometrische Progressionen | 62 |
| 1.3 Die Divergenz der harmonischen Reihe | 64 |
| 1.4 Induktionsbeweise für die obigen Summationsaussagen | 66 |
| § 2 Diskussion des Induktionsprinzips | 69 |
| 2.1 Grundsätzliches zum Induktionsprinzip | 69 |
| 2.2 Intuitive Beweise und Induktionsbeweise | 71 |
| § 3 Elemente der Kombinatorik | 71 |
| 3.1 Wörter | 71 |
| 3.2 Die Anzahl aller Wörter gegebener Länge | 72 |
| 3.3 Die Anzahl aller 0-1-Wörter mit vorgeschriebenen vielen Einsen | 73 |
| 3.4 Die Anzahl der Wörter mit lauter verschiedenen Buchstaben | 76 |
| § 4 Der Heiratssatz | 77 |
| § 5 Der binomische Lehrsatz | 78 |
| § 6 Induktionsbeweise für zwei grundlegende Aussagen | 80 |
| 6.1 Die Wohlordnung der natürlichen Zahlen | 80 |
| 6.2 Das Dirichletsche Schubfachprinzip und die Dedekindsche Definition des Begriffs „endliche Menge“ | 81 |
| 6.3 Der Satz von Ramsey | 82 |
| § 7 Induktive Konstruktion | 83 |
| 7.1 Die Fibonacci-Zahlen | 84 |
| 7.2 Die Thue-Morse-Folge | 86 |
| 7.3 Das Diagonal-Verfahren von Georg Cantor | 89 |

Kapitel IV Optimierung, Spieltheorie, Ökonomie 91

| | |
|---|-----|
| § 1 Optimierungsaufgaben | 91 |
| 1.1 Sortierung | 92 |
| 1.2 Eine einfache lineare Optimierung | 92 |
| 1.3 Ein Beispiel für quadratische Optimierung | 94 |
| 1.4 Ein Beispiel für kubische Optimierung | 94 |
| 1.5 Netzwerk-Optimierung | 96 |
| § 2 Optimale Flüsse in Netzwerken | 97 |
| § 3 Angeordnete Körper | 101 |
| 3.1 Anordnungen und Halbordnungen | 101 |
| 3.2 Angeordnete Körper | 102 |
| 3.3 Arithmetische Mittel und gewichtete Mittel | 105 |
| 3.4 Der Verlauf von Potenz- und Polynomfunktionen | 109 |
| § 4 Mehrpersonenspiele: Beispiele | 111 |
| 4.1 Knobeln | 111 |
| 4.2 Das Spiel NIMM | 113 |
| 4.3 Das Gefangenen-Dilemma | 114 |
| 4.4 Einige weitere Bimatrix-Spiele | 115 |

| | | |
|-----|---|-----|
| 4.5 | Spieltheorie und Biologie | 117 |
| 4.6 | Aggregation von Präferenzen und Arrow's Diktator-Theorem | 118 |
| § 5 | Gleichgewicht | 120 |
| 5.1 | Das Gleichgewichts-Theorem für Baumspiele | 121 |
| 5.2 | Das Gleichgewichts-Theorem für nichtkooperative Spiele | 126 |
| 5.3 | Gleichgewichts-Theoreme der mathematischen Ökonomie | 131 |
| | Kapitel V Topologie | 133 |
| § 1 | Topologische Räume und stetige Abbildungen | 133 |
| § 2 | Kurven und Knoten | 137 |
| § 3 | Flächen | 143 |
| § 4 | Kurven auf Flächen | 149 |
| 4.1 | Die Eulersche Polyederformel | 150 |
| 4.2 | Die Fundamentalgruppe | 151 |
| § 5 | Kompaktheit | 152 |
| § 6 | Ausblick | 158 |
| | Kapitel VI Dynamik | 159 |
| § 1 | Dynamische Systeme mit endlichvielen Zuständen | 161 |
| 1.1 | Der injektive Fall | 161 |
| 1.2 | Der allgemeine Fall | 162 |
| 1.3 | Ausblick auf den Automatenbegriff | 163 |
| § 2 | Game of Life | 163 |
| 2.1 | Die Zustandsmenge von „Game of Life“ | 163 |
| 2.2 | Das Änderungsgesetz von „Game of Life“ | 164 |
| 2.3 | Die Lebensgeschichten (Bahnen) einiger Konfigurationen (Zustände) | 165 |
| 2.4 | Der Satz vom Paradies („Garden-of-Eden Theorem“) | 169 |
| § 3 | Einige weitere dynamische Systeme | 170 |
| 3.1 | Die Kreisrotation (Kronecker [1884]) | 170 |
| 3.2 | Die Blätterteig- oder Bäcker-Transformation | 173 |
| 3.3 | Die Hufeisen-Transformation („horseshoe“) | 174 |
| § 4 | Der shift | 176 |
| 4.1 | Fixpunkte | 179 |
| 4.2 | Periode 2 | 179 |
| 4.3 | Längere Perioden | 179 |
| 4.4 | Fastperiodizität | 180 |
| § 5 | Allgemeine Ergebnisse der Dynamik | 182 |
| § 6 | Stabilität und Instabilität | 182 |
| 6.1 | Stabilität | 184 |
| 6.2 | Instabilität | 185 |
| | Literaturverzeichnis | 187 |
| | Quellenverzeichnis | 193 |
| | Register | 194 |