

INHALT

Vorwort	V
Einleitende Vorbemerkung	1

ERSTES KAPITEL: BLICK AUF DIE GRUNDLAGEN DER VORGRIECHISCHEN MATHEMATIK

A. Rechentechnik	3
1. Ägyptische Rechentechnik	3
2. Babylonische Rechentechnik	5
B. Algebra	7
1. Ägyptische Algebra	7
2. Babylonische Algebra	8
C. Ägyptische und babylonische Geometrie	18

ZWEITES KAPITEL: DIE BEGRÜNDUNG DER WISSEN- SCHAFTLICHEN MATHEMATIK DURCH DIE GRIECHEN

A. Die frühgriechische Mathematik	23
1. Zahlzeichen und Rechnen	23
2. Die Anfänge der griechischen Geometrie	24
3. Der Bericht des Eudemos über die Quadratur der „Möndchen“ durch Hippokrates von Chios	29
4. Die Arithmetik der Spielsteine (<i>psēphoi</i>)	34
5. Die Lehre vom Geraden und Ungeraden	37
B. Die Grundlegung der Mathematik des Infinitesimalen	41
1. Die ersten Betrachtungen über das Unendlichkleine (<i>Zenon von Elea, Anaxagoras</i>)	41
2. Das Problem der Kreisquadratur (<i>Antiphan, Bryson, Eudoxos</i>)	43
3. Integrationen nach der atomistischen und nach der Exhaustionsmethode (<i>Demokrit, Heron, Archimedes</i>)	55
4. Die Analyse des Unendlichkeits- und Stetigkeitsbegriffs durch Aristoteles (<i>Unendlichkeit — Kontinuität — Zenons Paradoxien</i>)	64

C. Die Theorie der Proportionen	78
1. Anfänge der Proportionslehre (<i>Archytas u. a.</i>)	78
2. Die Lehre von der geometrischen Proportion vor Eudoxos	79
3. Die klassische Fassung der allgemeinen Proportionslehre durch Eudoxos	83
D. Die systematische Grundlegung der griechischen Mathematik innerhalb ihrer selbst	87
1. Die logische Begründung durch die Axiomatik	87
2. Der technische Sinn des Begriffs der mathematischen Existenz in der Antike	90
E. Die philosophische Reflexion auf die „elementare“ Grundlegung und das Wesen der Mathematik	95
I. Logische und methodische Fragen	95
1. Platon über das Wesen der Mathematik	95
2. Aristoteles über die Struktur einer „beweisenden“ Wissenschaft	96
3. Proklos über Begriff und Methode der „Elemente“ der Mathematik	98
II. Die Frage nach der Seinsweise der mathematischen Gegenstände	105
1. Erste Betrachtungen zur Ontologie des Mathematischen durch die Pythagoreer	105
2. Platon über den Seinssinn des Mathematischen	109
3. Der „abstrakte“ Charakter des Mathematischen nach Aristoteles.	118
4. Die neuplatonische Philosophie der Mathematik im Euklid-Kommentar des Proklos	121

DRITTES KAPITEL: DIE GRUNDLEGUNG DER NEUEREN ABENDLÄNDISCHEN MATHEMATIK IM 17. JAHRHUNDERT

DIE ENTDECKUNG DER ANALYSIS DES UNENDLICHEN

A. Vorstadien der Infinitesimalrechnung	131
(<i>Nicole Oresme, Galilei, Kepler</i>)	
B. Die Entdeckung der analytischen Geometrie durch Descartes	139

C. Die Erfindung des Infinitesimalkalküls	144
1. Die Fluxionsmethode (<i>Barrow</i> und <i>Newton</i>)	145
2. Berkeleys Kritik an der Fluxionsrechnung	156
3. Leibnizens Differentialrechnung	158

VIERTES KAPITEL: DIE KRITISCHE MATHEMATIK
DES 19. JAHRHUNDERTS

ERSTER ABSCHNITT

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

1. Proklos über das 5. Postulat der Euklidischen „Elemente“	168
2. J. Wallis' Beweis der 5. Forderung Euklids aus der Existenz ähnlicher Figuren	170
3. Girolamo Saccheris „von jedem Makel befreiter Euklid“	171
4. Johann Heinrich Lamberts Theorie der Parallellinien .	173
5. Kants Lehre vom Raum	175
6. Gaußens Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie	178
7. F. A. Taurinus' Eintreten für den euklidischen Raum als eindeutige, apriorische Form des äußeren Sinnes . . .	183
8. B. Riemann über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen	185
9. Felix Klein: Beweis für die Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrien	194
10. Felix Klein: gruppentheoretisches „Erlanger Programm“	197
11. Moritz Paschs axiomatische Begründung der Geometrie	199
12. David Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ (<i>Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit der geometrischen Axiome</i>)	202
13. Poincaré über die geometrischen Axiome als zweckmäßige Konventionen	208
14. H. Dingler über den Aufbau einer technisch brauchbaren Geometrie	209

ZWEITER ABSCHNITT

DIE GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK, ANALYSIS UND MENGENLEHRE

A. Arithmetik	213
Leibniz und Gauß über das Imaginäre	213
B. Analysis	217
1. B. Bolzanos Beweis für den Zwischenwertsatz	217
2. Die Entwicklung des Funktionsbegriffs nach H. Hankel	219
3. R. Dedekinds „Schnitt“-Theorie der irrationalen Zahl	224

4. G. Cantors Definition der irrationalen Zahl	245
5. P. du Bois-Reymonds „Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: Größe, Grenze, Argument und Funktion“	251
C. Mengenlehre	272
1. Proklos über ein Paradoxon des Unendlichen	273
2. Aus B. Bolzanos „Paradoxien des Unendlichen“ (Prag 1851)	274
3. Georg Cantors Mengenlehre	277

(Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen, Nichtabzählbarkeit des Kontinuums — Erste Einführung der transfiniten Zahlen — Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre — „Inkonsistente“ Vielheiten — J. v. Neumanns Begriff der „zu großen“ Mengen — Dedekind und Cantor über ihre Vorstellung einer unendlichen Menge — Dedekinds „Beweis“ für die Existenz unendlicher Mengen)

FÜNFTES KAPITEL: DIE GRUNDLAGENFORSCHUNG DES 20. JAHRHUNDERTS

A. Logizismus	317
1. G. Freges Kritik eines Leibnizschen Beweises und Definition des Begriffs der Zahl mit rein logischen Mitteln	317
2. B. Russells logische Definition der Zahl	322
3. B. Russell: Die Antinomien der Mengenlehre und ihre Auflösung durch die Theorie der logischen Typen	323
B. Intuitionismus	327
1. L. K. Kronecker gegen den Gebrauch irrationaler Zahlen und nicht-entscheidbarer Definitionen	327
2. É. Borels Bedenken gegen den Begriff einer unstetigen Funktion allgemeinsten Art	328
3. L. E. J. Brouwers „Neointuitionismus“ (<i>Die intuitionistische Mengenlehre, unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten</i>)	329
4. A. Kolmogoroffs Deutung der Brouwerschen Logik als „Aufgabenrechnung“	334
5. H. Weyl über die „Grundlagenkrise der Mathematik“ (Halbintuitionismus und Intuitionismus)	336
C. Beweistheorie (Formalismus)	351
1. D. Hilberts axiomatische Definition der Zahl	351

Inhalt

2. Einige Betrachtungen von Leibniz zur „Charakteristik“ (Zeichen und Dinge)	355
3. D. Hilberts erster Ansatz zu einem Widerspruchsfreiheits- beweis der Arithmetik	360
4. Charakteristische Proben aus Hilberts reifen Arbeiten zur Beweistheorie (Metamathematik)	370
5. E. Husserl über noetisch-noematische Stufen und ihre Charakteristik	384
6. Schelling über transfiniten Reflexionen	387
7. Gentzens Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Zah- lentheorie	387
8. P. Lorenzens konstruktive Begründung der Mathematik	392
9. P. Lorenzens Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Analysis	398
Schlußwort	402
Quellenverzeichnis	403
Textkritische Anmerkungen	408
Bibliographie	410
Namenverzeichnis	415
Sachverzeichnis	420