

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

Seite

I	<u>Einleitung</u>	
1	<u>Methodische Voraussetzungen der Arbeit</u>	
1.1	Disziplinäre und soziale Matrix der Wissenschaft	9
1.2	Disziplinärer Wandel der Mathematik	13
2	<u>Zum Gegenstand der Arbeit</u>	
2.1	Ansätze n-dimensionaler Geometrie in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts	15
2.2	Fragestellungen und Aufbau der Arbeit	19
II	<u>Riemanns Mannigfaltigkeitsbegriff</u>	
0	Vorbemerkungen	24
1	<u>Allgemeiner Mannigfaltigkeitsbegriff und Differentialgeometrie bei Riemann</u>	
1.0	Grundlagen der Geometrie und Differentialgeometrie bei Gauß	26
1.1	Intension des Mannigfaltigkeitsbegriffs bei Riemann	30
1.2	Differentialgeometrie in Mannigfaltigkeiten	38
1.3	Riemanns geometrisches Forschungsprogramm	45
2	<u>Mannigfaltigkeiten in der komplexen Analysis</u>	
2.0	Zum Hintergrund der Riemannschen geometrischen Funktionentheorie	51
2.1	Riemannsche Flächen und ihre Topologie	55
2.2	Kompakte Riemannsche Flächen als algebraische Kurven	71
2.3	Ansätze zum Studium höherdimensionaler Mannigfaltigkeiten	78
3	<u>Die neue disziplinäre Stellung der Geometrie in Mathematik und Naturerkenntnis bei Riemann</u>	
3.1	Geometrie innerhalb der Mathematik	88
3.2	Geometrie des physikalischen Raumes	94

	<u>Seite</u>
III <u>Mannigfaltigkeiten in den Grundlagen der Geometrie</u>	
0 Vorbemerkungen	100
1 <u>Beltrami: Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung</u>	
1.1 Ausgezeichnete Koordinatensysteme für Flächen konstanter Krümmung	101
1.2 Beltramis Modell der hyperbolischen Ebene	103
1.3 Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung	108
1.4 Zur Bedeutung der Beltramischen Arbeiten	111
2 <u>Helmholtz: Geometrie und Tatsachen</u>	
2.1 Helmholtzens Interesse an der Geometrie	113
2.2 Das Mannigfaltigkeitskonzept bei Helmholtz	115
2.3 Kongruenzgeometrie, Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung	117
2.4 Begründung der Geometrie durch empirisch-theoretische Naturwissenschaft statt durch transzendente Erkenntniskritik	120
3 <u>F. Klein: Mannigfaltigkeiten und Gruppen als Gliederungsprinzipien der Geometrie</u>	
3.1 Zu Kleins frühem Werdegang	123
3.2 Projektive Geometrie und nichteuclidische Geometrie	125
3.3 Kleins Mannigfaltigkeitskonzept zur Zeit des Erlanger Programms	131
4 <u>Mannigfaltigkeiten in den Grundlagen der Geometrie: eine Durchgangsphase in der Rezeption der Riemannschen Auffassungen</u>	
4.1 Bedeutung des Mannigfaltigkeitskonzepts für die Durchsetzung der nichteuclidischen Geometrie	136
4.2 Einschränkungen des Mannigfaltigkeitsbegriffs	138
4.3 Raumbegriff und naturwissenschaftliche Forschung	140
IV <u>Topologie von Flächen bis etwa 1880</u>	
0 Vorbemerkungen	142
1 <u>Topologische Klassifikation von Flächen</u>	
1.1 Die Entdeckung nichtorientierbarer Flächen durch Möbius	143

	<u>Seite</u>
1.2 Topologische Abbildungen von Flächen bei Möbius und Jordan	147
1.3 Klassifikation orientierbarer geschlossener Flächen bei Möbius	150
1.4 Flächentopologie bei C. Jordan	154
1.5 Topologie Riemannscher Flächen	159
2 <u>Der Zusammenhang von reell projektiven Flächen als ein Problem des globalen Verhaltens von Mannigfaltigkeiten</u>	
2.1 Kompaktifizierung im Unendlichen	163
2.2 Nichtorientierbare Flächen	164
2.3 Konsequenzen für Kleins Mannigfaltigkeitsbegriff	170
3 <u>Flächentopologie, ein Schritt zur Schaffung einer neuen Disziplin</u>	
3.1 Zwei ursprüngliche Traditionen der Flächentopologie	174
3.2 Ansätze einer neuen Disziplin	176
3.3 Bedeutung der Flächentopologie für den Mannigfaltigkeitsbegriff	177
V <u>Mannigfaltigkeiten in der komplexen Funktionentheorie</u>	
0 Vorbemerkungen	180
1 <u>Riemannsche Flächen und komplex eindimensionale Mannigfaltigkeiten</u>	
1.1 Kleins Auffassung der Riemannschen Fläche	182
1.2 Konstruktion aus Funktionselementen	188
1.3 Axiomatisierung des Begriffs der Riemannschen Fläche	193
2 <u>Uniformisierung und Überlagerung</u>	
2.1 Uniformisierungssätze	198
2.2 Poincarés Konstruktion der Überlagerungsfläche	202
3 <u>Die Kontinuitätsmethode</u>	
3.1 Idee und Probleme der Kontinuitätsbeweise von Klein und Poincaré	205
3.2 Präzisierung durch Brouwer und Koebe	216

	<u>Seite</u>	
4	<u>Entwicklung des Mannigfaltigkeitsbegriffs in der geometrischen Funktionentheorie</u>	
4.1	Wandlungen in Objekt und Methode der geometrischen Funktionentheorie	223
4.2	Einflußnahme der geometrischen Funktionentheorie auf die Entwicklung des Mannigfaltigkeitsbegriffs	226
VI	<u>Ansätze zum topologischen Studium höherdimensionaler Mannigfaltigkeiten vor Poincaré</u>	
0	Vorbemerkungen	230
1	<u>Höherdimensionale Geometrie</u>	
1.1	Projektive Geometrie in n-Dimensionen	231
1.2	Affine und euklidische n-dimensionale Geometrie	235
1.3	Präzisierung der Charakterisierung von Nullstellenmengen	237
1.4	Vektorraumgeometrie	238
1.5	Durchsetzung der n-dimensionalen Geometrie und Mannigfaltigkeitsbegriff	240
2	<u>Ansätze zur Erforschung der Topologie höherdimensionaler Mannigfaltigkeiten</u>	
2.1	Bettis Zusammenhangszahlen	243
2.2	Dycks Charakteristik von Mannigfaltigkeiten	249
2.3	Picards Untersuchung der Topologie algebraischer Flächen	258
3	<u>An der Schwelle zu einer neuen Disziplin</u>	
3.1	Verbreitung der n-dimensionalen Geometrie algebraisch und analytisch definierter Objekte	263
3.2	Klärung der Grundlinien eines Weges zur topologischen Theorie der Mannigfaltigkeiten	264
VII	<u>Poincarés topologische Theorie der Mannigfaltigkeiten</u>	
0	Vorbemerkungen	268
1	<u>Von einer "hypergeometrischen" Sprache zur Analysis Situs von Mannigfaltigkeiten</u>	
1.1	Qualitative Theorie der Differentialgleichungen	270

	<u>Seite</u>
1.2 Weitere frühe Begegnungen mit Mannigfaltigkeiten	281
2 <u>Poincarés konstruktiver Mannigfaltigkeitsbegriff</u>	
2.1 Konstruktion durch Nullstellenmengen und lokale Parametrisierung	287
2.2 Zusätzliche Methoden zur Konstruktion dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten	294
2.3 Zellenzerlegung von Mannigfaltigkeiten	297
3 <u>Methoden und Resultate der topologischen Theorie</u>	
3.1 Homologie	299
3.2 Fundamentalgruppe	311
3.3 Bettizahlen algebraischer Flächen	320
4 <u>Poincarés Schritt in der Wende der Geometrie</u>	
4.1 Herausbildung einer neuen geometrischen Teildisziplin	324
4.2 Poincarés Wissenschaftsphilosophie und seine Einschränkung gegenüber Riemanns Zielsetzungen geometrischer Erkenntnis	329
VIII <u>Mannigfaltigkeiten und die Entstehung der modernen Mathematik</u>	
1 <u>Resümee der Entwicklung des Mannigfaltigkeitsbegriffs</u>	
1.1 Riemanns Antizipation einer erneuerten Geometrie	337
1.2 Wandel traditioneller Teilgebiete (1.Phase)	339
1.3 Poincarés Überführung des Begriffs in theoretische Form	341
2 <u>Ausblick: Fragen zur Entstehung der modernen Mathematik</u>	
2.1 Mannigfaltigkeitsgeometrie und moderne Mathematik	342
2.2 Riemann und Poincaré: Zum Selbstverständnis mathematischer Forschung	345

	<u>Seite</u>
Anhang 1: <u>Zur Entstehung der Theorie der automorphen Funktionen</u>	
1.1 Riemann	349
1.2 Schwarz, Schottky, Fuchs und Klein	352
1.3 Poincaré	357
Anhang 2: <u>Zur Ausdifferenzierung der birationalen Geometrie algebraischer Gebilde</u>	
2.1 Birationale Geometrie von Kurven	359
2.2 Birationale Geometrie von Flächen	362
2.3 Höherdimensionale Gebilde und der strukturetheoretische Ansatz	363
Anhang 3: <u>Poincarés Berechnung der 2. Bettizahl algebraischer Flächen</u>	
3.1 Zellenzerlegung der Fläche	365
3.2 Berechnung von P_2	366
<u>Anmerkungen</u>	372
<u>Literaturverzeichnis</u>	408