

Inhalt

Einleitung	12
I Mengen und Zahlen	
1 Mengen und ihre Verknüpfungen	17
2 Vorbemerkungen über die reellen Zahlen	26
3 Die axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen	32
4 Folgerungen aus den Körperaxiomen	39
5 Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen	44
6 Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen	48
7 Rekursive Definitionen und induktive Beweise. Kombinatorik	52
8 Folgerungen aus dem Schnittaxiom	70
9 Die Potenz mit rationalem Exponenten	77
10 Abstand und Betrag	81
11 Das Summen- und Produktzeichen	89
12 Einige nützliche Ungleichungen	95
II Funktionen	
13 Der Funktionsbegriff	102
14 Reellwertige Funktionen. Funktionenräume und -algebren	111
15 Polynome und rationale Funktionen	122
16 Interpolation	128
17 Der Differenzenoperator. Lineare Abbildungen	130
18 Der Interpolationsfehler	135
19 Mengenvergleiche	137
III Grenzwerte von Zahlenfolgen	
20 Der Grenzwertbegriff	142
21 Beispiele konvergenter und divergenter Folgen	147
22 Das Rechnen mit konvergenten Folgen	152
23 Vier Prinzipien der Konvergenztheorie	155
24 Die Dezimalbruchdarstellung der reellen Zahlen	161
25 Die allgemeine Potenz und der Logarithmus	163
26 Veränderungsprozesse und Exponentialfunktion	168
27 Der Cauchysche Grenzwertsatz	176
28 Häufungswerte einer Zahlenfolge	179
29 Uneigentliche Grenzwerte, Häufungswerte und Grenzen	183

IV Unendliche Reihen

30 Begriff der unendlichen Reihe	187
31 Konvergente und absolut konvergente Reihen	189
32 Das Rechnen mit konvergenten Reihen	195
33 Konvergenz- und Divergenzkriterien	203

V Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

34 Einfache Eigenschaften stetiger Funktionen	212
35 Fixpunkt- und Zwischenwertsätze für stetige Funktionen	220
36 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen	224
37 Der Umkehrsatz für streng monotone Funktionen	231
38 Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow \xi$	233
39 Einseitige Grenzwerte	238
40 Die Oszillation einer beschränkten Funktion	241
41 Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow \pm\infty$	243
42 Das Rechnen mit Grenzwerten	245
43 Uneigentliche Grenzwerte	246
44 Vereinheitlichung der Grenzwertdefinitionen. Netze	249
45 Doppelreihen	256

VI Differenzierbare Funktionen

46 Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion	260
47 Differentiationsregeln	270
48 Die Differentiation elementarer Funktionen. Winkelfunktionen	273
49 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung	279
50 Die Regel von de l'Hospital	286

VII Anwendungen

51 Nochmals der Interpolationsfehler	291
52 Kurvendiskussion	293
53 Hyperbelfunktionen, Hochspannungsleitungen, Tempelsäulen .	296
54 Extremalprobleme	303
55 Exponentielle, autokatalytische und logistische Prozesse. Epidemien. Das psychophysische Grundgesetz. Mathematische Erfassung von Naturvorgängen	309
56 Fall und Wurf, Raketenflug und Vollbremsung	324
57 Schwingungen. Weitere Eigenschaften der Winkelfunktionen .	334
58 Symbiotische und destruktive Prozesse	342
59 Konvexe und konkave Funktionen als Quelle fundamentaler Ungleichungen	347

VIII Der Taylorsche Satz und Potenzreihen

60 Der Mittelwertsatz für höhere Differenzen	353
61 Der Taylorsche Satz und die Taylorsche Entwicklung	353

62	Beispiele für Taylorsche Entwicklungen	358
63	Potenzreihen	362
64	Die Summenfunktion einer Potenzreihe	367
65	Der Abelsche Grenzwertsatz	379
66	Die Division von Potenzreihen	386
67	Die Existenz der Winkelfunktionen	391
68	Potenzreihen im Komplexen	393
69	Der Nullstellensatz für Polynome und die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen	398

IX Anwendungen

70	Das Newtonsche Verfahren	406
71	Bernoullische Zahlen und Bernoullische Polynome	410
72	Gedämpfte freie Schwingungen	413
73	Die homogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	422
74	Die inhomogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und speziellen Störgliedern	426
75	Resonanz	430

X Integration

76	Unbestimmte Integrale	435
77	Regeln der unbestimmten Integration	438
78	Die Integration der rationalen Funktionen	445
79	Das Riemannsches Integral	447
80	Exkurs: Arbeit und Flächeninhalt	457
81	Stammfunktionen stetiger Funktionen	460
82	Die Darboux'schen Integrale	464
83	Das Riemannsches Integritätskriterium	468
84	Das Lebesguesche Integritätskriterium	470
85	Integralungleichungen und Mittelwertsätze	475
86	Nochmals das Integral $\int_a^x f(t)dt$ mit variabler oberer Grenze	479

XI Uneigentliche und Riemann-Stieltjessche Integrale

87	Integrale über unbeschränkte Intervalle	480
88	Das Integralkriterium	483
89	Integrale von unbeschränkten Funktionen	485
90	Definition und einfache Eigenschaften des Riemann-Stieltjesschen Integrals	489
91	Funktionen von beschränkter Variation	493
92	Existenzsätze für RS-Integrale	499
93	Mittelwertsätze für RS-Integrale	502

XII Anwendungen

94	Das Wallissche Produkt	504
----	------------------------	-----

95 Die Eulersche Summenformel	506
96 Die Stirlingsche Formel	510
97 Räuberische Prozesse. Die Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen	512
98 Fremdbestimmte Veränderungsprozesse. Die allgemeine lineare Differentialgleichung erster Ordnung	518
99 Erzwungene Schwingungen. Die inhomogene lineare Differen- tialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten .	524
100 Numerische Integration	529
101 Potentielle und kinetische Energie	533

XIII Vertauschung von Grenzübergängen. Gleichmäßige und monotone Konvergenz

102 Vorbemerkungen zum Vertauschungsproblem	537
103 Gleichmäßige Konvergenz	542
104 Vertauschung von Grenzübergängen bei Folgen	550
105 Kriterien für gleichmäßige Konvergenz	555
106 Gleichstetigkeit. Der Satz von Arzelà-Ascoli	561
107 Vertauschung von Grenzübergängen bei Netzen	568
108 Monotone Konvergenz	577
Lösungen ausgewählter Aufgaben	583
Literaturverzeichnis	629
Symbolverzeichnis	630
Namen- und Sachverzeichnis	631