# Inhaltsverzeichnis


Seite

Einleitung.
Vorwort . . . . . . . . . . 5

*Kapitel I. Körper, Polynome, Matrizen*

1. Definition und Beispiele von Körpern . . . . . . . . 7
2. Reduzible und irreduzible Polynome . . . . . . . . 8
3. Grösster gemeinsamer Teiler von Polynomen in $x$ . . . . . . . . 8
4.—5. Grösster gemeinsamer Teiler von ganzen Zahlen . . . . . . . . 10
6. Rationale Funktionen einer Wurzel in Form von Polynomen . . . . 11
7. Lineare Transformationen . . . . . . . . 12
8. Matrizen . . . . . . . . 14
9. Polynome in einer Matrix $m$ . . . . . . . . 17
10. Charakteristische Determinante und Gleichung einer Matrix . . . . 18
11. Hauptgleichung einer Matrix . . . . . . . . 20
12. Rang . . . . . . . . 21

*Kapitel II. Einführung in die Algebren*

13. Definition einer Algebra in einem Körper . . . . . . . . 23
14. Null, Basis und Ordnung einer Algebra . . . . . . . . 24
15. Lineare Abhängigkeit in bezug auf einen Körper . . . . . . . . 26
16. Transformation der Basisgrössen . . . . . . . . 27
17. Haupteinheit . . . . . . . . 28
18. Vollständige Matrixalgebren . . . . . . . . 29
19. Darstellung einer Algebra mittels ihrer Basis . . . . . . . . 30
20. Äquivalente und reziproke Algebren . . . . . . . . 31
21. Zweite Definition einer Algebra . . . . . . . . 32
22. Hinzufügen einer Haupteinheit zu einer Algebra . . . . . . . . 33
23. Jede assoziative Algebra ist einer Matrixalgebra äquivalent . . . . 33
24. Charakteristische Matrizen, Determinanten und Gleichungen einer Grösse $x$ aus einer assoziativen Algebra in $K$ . . . . . . . . 36
25. Invarianz der charakteristischen Determinanten . . . . . . . . 37
26. Hauptgleichung einer Grösse aus einer Algebra . . . . . . . . 38

*Kapitel III. Divisionsalgebren*

27. Einleitung und Zusammenfassung . . . . . . . . 40
28.—29. Definition einer Divisionsalgebra . . . . . . . . 40
30. Divisionsalgebren im komplexen Körper . . . . . . . . 42
31. Divisionsalgebren vom Rang 2 . . . . . . . . 43
32. Verallgemeinerte Quaternionen . . . . . . . . 46
33. Herleitung von Divisionsalgebren aus solchen, die bekannt sind . . . 49
34. Unendliche Systeme von Divisionsalgebren . . . . . . . . 51
35. Algebren vom Typus $D$ . . . . . . . . 55
36. Plan der allgemeinen Untersuchung . . . . . . . . 56
37. Kommutativer Fall . . . . . . . . 58

Seite
38. Zwei vertauschbare Erzeugende . . . . . . . . . . . . . . 61
39. Divisionsalgebren $\Gamma$ mit $p = 2$ . . . . . . . . . . . . . . 63
40. Divisionsalgebren $\Gamma$ mit $p = 3$ . . . . . . . . . . . . . . 65
41. Darstellung von $\Gamma$ als Matrixalgebra . . . . . . . . . . . 68
42. Bedingungen dafür, dass eine Algebra vom Typus $D$ eine Divisionsalgebra ist . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
43. Beispiele von Divisionsalgebren vom Typus $D$ . . . . . . . . . . 73
44. Allgemeine Algebren $\Gamma$ . . . . . . . . . . . . . . . . . 75

*Kapitel IV. Linearsysteme von Grössen einer Algebra*

45. Basis, Ordnung und Durchschnitt von Linearsystemen. . . . . . . 80
46. Summe . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 81
47. Linearsysteme, die in ihrer Summe supplementär sind. . . . . . . 82
48. Produkte von Linearsystemen . . . . . . . . . . . . . . . 83

*Kapitel V. Invariante Teilalgebren, Direkte Summe, Reduzibilität, Differenzenalgebra*

49. Teilalgebra . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
50. Invariante Teilalgebra. . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
51. Direkte Summe, Reduzible Algebren . . . . . . . . . . . . . 86
52. Reduzible Algebren . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87
53. Reduktion nur auf eine Weise möglich. . . . . . . . . . . . 88
54.—56. Differenzenalgebra . . . . . . . . . . . . . . . . . 89
57. Einfache Algebren . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 92

*Kapitel VI. Nilpotente und halbeinfache Algebren; idempotente Grössen*

58. Index . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 94
59. Nilpotente Algebren, Radikal. . . . . . . . . . . . . . . . 94
60. Idempotente Grössen . . . . . . . . . . . . . . . . . . 95
61. Eigentlich nilpotente Grössen . . . . . . . . . . . . . . 97
62. Zerlegung bezüglich eines Idempotents . . . . . . . . . . . 98
63.—65. Ausgezeichnete idempotente Grössen . . . . . . . . . . 100
66. Halbeinfache Algebren . . . . . . . . . . . . . . . . . 101
67.—68. $A—N$ ist halbeinfach . . . . . . . . . . . . . . . 102
69.—70. Halbeinfache Algebren als direkte Summe von einfachen . . . 103
71. Primitive idempotente Grössen . . . . . . . . . . . . . . 105
72. Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $g(x)$ . . . . . . 107
73. Kriterien für eigentlich nilpotente Grössen, Spuren . . . . . . 108
74. Normalbasis einer nilpotenten Algebra. . . . . . . . . . . . 110
75. Kriterien für eine Divisionsalgebra . . . . . . . . . . . . 111
76. Idempotente Grössen einer Differenzenalgebra . . . . . . . . 113

*Kapitel VII. Struktur der Algebren*

77. Direktes Produkt . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 115
78.—79. Struktur der einfachen Algebren . . . . . . . . . . . . 116
80. Eine direkte Summe von vollständigen Matrixalgebren kommt als Teilalgebra in $A$ vor, wenn sie in $A-N$ vorkommt. . . . . . . . . 122
81. Struktur von $A$, wenn $A-N$ einfach ist . . . . . . . . . . 125
82. Struktur einer beliebigen Algebra. . . . . . . . . . . . . . 128

Seite
83. Divisionsalgebren als direkte Summe von vollständigen Matrixalgebren . . . . . 131
84.—85. Hauptsatz für Algebren mit einem einzigen Idempotent . . . . 132
86. Divisionsalgebren . . . . . 137

*Kapitel VIII. Algebraische Zahlen*

87. Algebraische Zahlen . . . . . 140
88. Gauss'sches Lemma . . . . . 141
89. Grad eines algebraischen Körpers; konjugierte Zahlen . . . . . 142
90. Existenz einer Basis für die ganzen Zahlen eines Körpers . . . . . 144
91. Verallgemeinerung von Gaussens Lemma . . . . . 147
92. Quadratische Körper . . . . . 148
93. Quadratische Körper, für welche die Gesetze der Arithmetik gelten . 150
94. Ganze rationale Zahlen, welche Summen von zwei ganzen Quadraten sind . . . . . 152

*Kapitel IX. Zahlentheorie der verallgemeinerten Quaternionenalgebren*

95. Einleitung . . . . . 154
96. Ganze Grössen einer rationalen Algebra . . . . . 154
97. Ganze verallgemeinerte Quaternionen . . . . . 155
98. Divisionsalgebren $D_\tau$ . . . . . 161
99. Rechts- und Linksteiler, Rechts- und Linksassoziierte, Einheiten, Primgrössen . . . . . 161
100. Zahlentheorie der Algebra $D_\tau$ für $\tau = -1, \pm 3$. Anwendungen . . . 162
101. Zahlentheorie der Algebra $D_{-7}$. Anwendungen . . . . . 188
102. Weitere Untersuchungen . . . . . 197

*Kapitel X. Allgemeine Zahlentheorie der Algebren*

103. Definition der ganzen Grössen . . . . . 198
104. Die einer Algebra $A$ zugeordnete rationale Algebra $A'$ . . . . . 199
105. Beispiel . . . . . 200
106.—108. Unzulänglichkeit der früheren Definitionen ganzer Grössen . . 201
109. Zahlentheorie einer nicht halbeinfachen Algebra . . . . . 206
110. Zahlentheorie einer direkten Summe . . . . . 208
111.—112. Existenz einer Basis für die ganzen Grössen einer rationalen halbeinfachen Algebra . . . . . 211
113. Existenz von ganzen Grössen in jeder rationalen Algebra . . . . . 215
114. Ganze Grössen einer einfachen Algebra . . . . . 216
115. Zahlentheorie gewisser einfacher Algebren. Matrizen mit ganzen Elementen . . . . . 219
116. Grösster gemeinsamer Teiler von Matrizen . . . . . 231
117. Halbeinfache Algebren in algebraischen Körpern . . . . . 233
118.—119. Quaternionen in einem quadratischen Körper . . . . . 235

*Kapitel XI. Körper, Quasi-Körper, Polynome in Unbestimmten*

120. Zahlbereiche . . . . . 237
121. Unbestimmte. Polynome in Unbestimmten . . . . . 238
122. Körper und Quasi-Körper . . . . . 240

Seite
123. Beispiele von endlichen Körpern und Zahlbereichen . . . . . . . . 241
124. Teilbarkeitsgesetze für Polynome . . . . . . . . . . . . . . . . 242
125. Algebraische Erweiterung eines Körpers . . . . . . . . . . . . . 247
126. Anwendung auf Kongruenzen; Galoisfelder. . . . . . . . . . . . 249
127. Endliche Quasi-Körper . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 251
128. Polynome mit Koeffizienten aus einem Quasi-Körper . . . . . . . 254
129. Erweiterung eines Körpers durch Adjunktion von Unbestimmten; Modularfelder . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 256

## *Kapitel XII. Ergänzungen über Algebren*

130. Körper, in denen die früheren Resultate gelten . . . . . . . . . . 258
131.—132. Ranggleichung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 259
133. Verallgemeinerung von Cayleys Algebra $8^{\text{ter}}$ Ordnung . . . . . . . 264
134. Algebren in Quasi-Körpern . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 265
135. Weitere Untersuchungen über Algebren . . . . . . . . . . . . . . 266

## *Kapitel XIII. Idealtheorie in rationalen Algebren von Andreas Speiser*

137. Moduln und Ideale . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 270
138. Grösster gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches . 272
139. Zerlegung der Ideale . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 273
140. Idealteiler einer Primzahl $p$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . 275
141. Ideale in kommutativen Algebren. . . . . . . . . . . . . . . . . 277
142. Zweiseitige Ideale in nicht-kommutativen Algebren . . . . . . . . 279
143. Neue Definition des Produktes zweier zweiseitiger Ideale. . . . . . 279
144. Die Reste nach einem zweiseitigen Primideal . . . . . . . . . . . 280
145. Diskriminantenteiler in kommutativen Algebren . . . . . . . . . . 281
146. Beispiele. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 285
147. Diskriminantenteiler in nicht-kommutativen Algebren. Erste Reduktion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 286
148. Fortsetzung. Zweite Reduktion. . . . . . . . . . . . . . . . . . 288
149. Zusammenfassung der Resultate über zweiseitige Ideale . . . . . . 291
150. Einseitige Primideale . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 293
151. Die Zerlegung der einseitigen Ideale. . . . . . . . . . . . . . . 296
152. Die Multiplikation von Zahlen . . . . . . . . . . . . . . . . . . 298
153. Zahlentheorie der Quaternionen . . . . . . . . . . . . . . . . . 302
Sachverzeichnis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 304