

# Inhalt

	<b>Überblick über die wichtigsten im vorliegenden Band eingeführten Zeichen</b>	<b>13</b>
<b>1.</b>	<b>Grundbegriffe und Rechenoperationen der abstrakten Idealtheorie in Noetherschen Ringen</b>	<b>17</b>
1.1.	Einleitung	17
1.2.	Idealdefinitionen, Restklassen nach Idealen, Kongruenzrechnung	18
1.3.	Idealbasen, Minimalbasen, Basen minimaler Länge, Ringe mit Basisbedingung	22
1.4.	Oberideale, Unterideale, Teilerketten, Teilerkettenbedingung, Maximalbedingung	24
1.5.	Der Äquivalenzsatz von EMMY NOETHER, Noethersche Ringe	26
1.6.	Der Hilbertsche Basissatz	27
1.7.	Polynome, Formen, Polynomideale, $P$ -Ideale, $H$ -Ideale, Potenzproduktideale	29
1.8.	Die Idealsumme	37
1.9.	Das Idealprodukt	39
1.10.	Das Radikal eines Ideals	42
1.11.	Der Idealdurchschnitt	47
1.12.	Zur Berechnung von Idealdurchschnitten, Beispiele	51
1.13.	Idealdurchschnitte von Potenzproduktidealen	53
1.14.	Der Idealquotient	54
1.15.	Zusammenstellung der Gesetzmäßigkeiten bei distributiven idealtheoretischen Operationen	60
1.16.	Äquivalente $H$ -Ideale als Idealquotienten	60
1.17.	Zur Berechnung von Idealquotienten, Beispiele	64
1.18.	Idealquotienten von Potenzproduktidealen	65
<b>2.</b>	<b>Die Lasker-Noetherschen Sätze</b>	<b>67</b>
2.1.	Einleitung	67
2.2.	Primideale	68
2.3.	Beispiele für Primideale	70

2.4.	Prime Potenzproduktideale . . . . .	72
2.5.	Quasiprimäre Ideale . . . . .	73
2.6.	Beispiele für quasiprimäre Ideale . . . . .	74
2.7.	Quasiprimäre Potenzproduktideale. . . . .	75
2.8.	Primär Ideale . . . . .	75
2.9.	Beispiele zur Definition der Primär Ideale . . . . .	77
2.10.	Primäre Potenzproduktideale . . . . .	78
2.11.	Der Idealquotient $\mathfrak{q} : \mathfrak{a}$ . . . . .	79
2.12.	Reduzible und irreduzible Ideale, Zusammenhang mit Primär Idealen und reinen Potenzproduktidealen . . . . .	81
2.13.	Die beiden Zerlegungssätze . . . . .	83
2.14.	Ein Kriterium für $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ . . . . .	84
2.15.	Isolierte und eingebettete Primärkomponenten, Hilfssätze . . . . .	85
2.16.	Der erste Eindeutigkeitssatz . . . . .	87
2.17.	Der zweite Eindeutigkeitssatz . . . . .	89
2.18.	Ein Kriterium für zugehörige Primideale . . . . .	90
2.19.	Durchschnittsdarstellungen für quasiprimäre Ideale . . . . .	91
2.20.	Mehrdeutigkeit der eingebetteten Komponenten . . . . .	92
2.21.	Reduzierte Darstellungen . . . . .	93
2.22.	Primärkomponentenzerlegung für Potenzproduktideale . . . . .	94
2.23.	Ausblick auf weitere Zerlegungssätze . . . . .	96
<b>3.</b>	<b>Nullstellen von Polynomidealen . . . . .</b>	<b>98</b>
3.1.	Einleitung, Definitionen . . . . .	98
3.2.	Allgemeine Nullstellen . . . . .	104
3.3.	Eindeutigkeit von $d$ , Austauschsatz, Dimension von $\mathfrak{p}$ . . . . .	108
3.4.	Allgemeine Nullstellen und vollständige Lösungen . . . . .	110
3.5.	Existenz allgemeiner Nullstellen . . . . .	111
3.6.	Eigenschaften von Nullstellengebilden . . . . .	114
3.7.	Der Hilbertsche Nullstellensatz für quasiprimäre und primäre $P$ - und $H$ -Ideale, $T$ -Ideale . . . . .	117
3.8.	Zur Lösbarkeit inhomogener Gleichungssysteme: Existenz von Nullstellen für $P$ -Ideale bei $(\mathfrak{a}) \neq (1)$ . . . . .	118
3.9.	Zur nichttrivialen Lösbarkeit homogener Gleichungssysteme: Existenz nicht-trivialer Nullstellen für nichttriviale $H$ -Ideale . . . . .	119
3.10.	Schnitte von Nullstellengebilden. . . . .	120
3.11.	Nullstellengebilde und Radikale . . . . .	121
3.12.	Der Hilbertsche Nullstellensatz für beliebige $P$ -Ideale, $H$ -Ideale und $T$ -Ideale, triviale Komponenten . . . . .	123
<b>4.</b>	<b>Dimensionstheorie der Polynomideale . . . . .</b>	<b>129</b>
4.1.	Einleitung . . . . .	129
4.2.	Vorbereitende Bemerkungen zur Dimensionsdefinition von VAN DER WAERDEN . . . . .	130
4.3.	Die Dimensionsaxiome von VAN DER WAERDEN . . . . .	132
4.4.	Folgerungen aus den van-der-Waerdenschen Axiomen . . . . .	133
4.5.	Die Dimensionsaxiome von GRÖBNER . . . . .	135
4.6.	Äquivalenz der Axiomensysteme . . . . .	136
4.7.	Folgerungen aus den Gröbnerschen Axiomen . . . . .	137
4.8.	Erläuterung der Gröbnerschen Dimensionsaxiome für inhomogene lineare Gleichungssysteme . . . . .	138

4.9.	Beispiele für die Dimensionsbestimmung mit Hilfe von $W_5$ und $G_2$ . . . . .	139
4.10.	Eliminationsideale . . . . .	142
4.11.	Grundideale, ungemischte, gemischte und pseudogemischte Ideale . . . . .	147
4.12.	Dimension von $((p), f)$ und $(p, F)$ . . . . .	150
4.13.	Dimension von $((a), f)$ und $(a, F)$ . . . . .	151
4.14.	Dimension von $a : b$ . . . . .	155
4.15.	Ungemischtheit von Hauptidealen . . . . .	156
4.16.	Dimension von $(a, b)$ für $H$ -Ideale . . . . .	157
4.17.	$s \geq r$ für $H$ -Ideale, $H$ -Ideale der Hauptklasse . . . . .	158
4.18.	Schnellbasen von $H$ -Idealen . . . . .	160
4.19.	Gemischtheit von $(a, F)$ bei $a : (F) = a$ und Gemischtheit von $a$ . . . . .	162
4.20.	Ungemischtheit von $H$ -Idealen der Hauptklasse . . . . .	164
4.21.	Pseudogemischtheit von $((p), f)$ und $(p, F)$ . . . . .	169
4.22.	Pseudogemischtheit von $(a, F)$ bei $a : (F) = a$ und Pseudogemischtheit von $a$ . . . . .	170
4.23.	Zur Übertragbarkeit auf $P$ -Ideale . . . . .	170
4.24.	$P$ -Ideale der Hauptklasse . . . . .	173
4.25.	Ungemischtheit von $P$ -Idealen der Hauptklasse und der Beweis von $t \geq r$ für $P$ -Ideale . . . . .	174
4.26.	Gemischtheit und Ungemischtheit von Idealpotenzen, Kriterien für Primärideale . . . . .	177
4.27.	Schranken für $s$ und $t$ , Kronecker-Perronsches Problem . . . . .	180
4.28.	Beziehungen zu linearen Gleichungssystemen . . . . .	186
<b>5.</b>	<b>Syzygentheorie der <math>H</math>-Ideale . . . . .</b>	<b>190</b>
5.1.	Einleitung . . . . .	190
5.2.	Homogene Matrizen . . . . .	192
5.3.	Homogenität der Unterdeterminanten von $H$ -Matrizen . . . . .	197
5.4.	Homogene Vektormoduln . . . . .	198
5.5.	Syzygien . . . . .	199
5.6.	Praktische Berechnung von Syzygienketten . . . . .	204
5.7.	Syzygienketten von $(a, F)$ . . . . .	212
5.8.	Syzygienketten von $H$ -Idealen der Hauptklasse . . . . .	217
5.9.	Syzygien von Potenzproduktidealen . . . . .	221
5.10.	Syzygienketten von Idealpotenzen . . . . .	223
5.11.	Bestimmung von Minimalbasen für $P$ -Ideale . . . . .	224
5.12.	Berechnung der Basen äquivalenter $H$ -Ideale, Gleichheit von $P$ -Idealen . . . . .	227
5.13.	Bestimmung der Basis von Idealquotienten $a : (F)$ und $(a) : (f)$ . . . . .	231
5.14.	Bestimmung der Basis von Idealdurchschnitten und beliebigen Idealquotienten . . . . .	233
5.15.	Berechnung der Volumfunktion . . . . .	235
5.16.	Obere Schranke für $L(a)$ , Abbrechen der Syzygienkette . . . . .	240
5.17.	Untere Schranken für $L(a)$ , Folgerungen . . . . .	243
5.18.	Zusammenstellung der Eigenschaften von $L(a)$ , perfekte Ideale . . . . .	246
<b>6.</b>	<b>Die Hilbertfunktion . . . . .</b>	<b>255</b>
6.1.	Einleitung, Definitionen, Grundeigenschaften . . . . .	255
6.2.	Die Hilbertfunktion nulldimensionaler $H$ -Ideale . . . . .	262
6.3.	Das charakteristische Polynom . . . . .	265
6.4.	Eigenschaften der Ordnung $h_0(a)$ . . . . .	275
6.5.	Der Bezoutsche Satz . . . . .	282
6.6.	Die Hilbertschen Gleichungen . . . . .	289

6.7.	Berechnung rationaler Primideale . . . . .	293
6.8.	Veronesesche Ideale und Projektionsideale . . . . .	300
6.9.	Ergänzende Bemerkungen . . . . .	309
<b>7.</b>	<b>Tabellen . . . . .</b>	<b>311</b>
7.1.	Tabelle 1: Potenzprodukte zweiten Grades in $x_0, x_1, x_2, x_3$ . . . . .	311
7.2.	Tabelle 2: Potenzprodukte dritten Grades in $x_0, x_1, x_2, x_3$ . . . . .	311
7.3.	Tabelle 3: Potenzprodukte vierten Grades in $x_0, x_1, x_2, x_3$ . . . . .	312
7.4.	Tabelle 4: Potenzprodukte fünften Grades in $x_0, x_1, x_2, x_3$ . . . . .	312
7.5.	Tabelle 5: Potenzprodukte sechsten Grades in $x_0, x_1, x_2, x_3$ . . . . .	312
7.6.	Tabelle 6: Einige Werte von $6 \binom{t+k+3}{3}$ . . . . .	313
7.7.	Tabelle 7: Einige Werte von $24 \binom{t+k+4}{4}$ . . . . .	314
<b>8.</b>	<b>Durchgerechnete Beispiele . . . . .</b>	<b>315</b>
8.1.	Potenzproduktideale . . . . .	315
8.2.	Eindimensionale Veronesesche Projektionsideale in $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ . . . . .	320
8.3.	Eindimensionale Veronesesche Projektionsideale in $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ . . . . .	325
8.4.	Höherdimensionale Veronesesche Projektionsideale . . . . .	328
8.5.	Anderere eindimensionale Ideale in $\mathbf{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ . . . . .	329
8.6.	Höherdimensionale Ideale . . . . .	333
	<b>Literatur . . . . .</b>	<b>335</b>
	<b>Verzeichnis der praktischen Methoden . . . . .</b>	<b>342</b>
	<b>Namen- und Sachverzeichnis . . . . .</b>	<b>343</b>