

# Table

CHAPITRE 1. ANNEAUX ET MODULES DE FRACTIONS - LOCALISATION ET GLOBALISATION	1
I. Parties multiplicatives	4
II. Anneaux et modules de fractions	7
1. Première construction	7
2. Deuxième construction	10
3. Platitude des anneaux des fractions	14
III. Sous-modules de modules de fractions	16
1. Sous-modules saturés pour une partie multiplicative	17
2. Un exemple important de sous-modules saturés: les sous-modules primaires	19
IV. Changement de parties multiplicatives	23
V. Le principe de globalisation	26
1. Le principe de globalisation	26
2. Support d'un module	28
VI. Modules de fractions, produit tensoriel et modules Hom	30
1. Modules de fractions et produit tensoriel	30
2. Foncteurs Tor et modules de fractions	31
3. Foncteurs Ext et modules de fractions	32
CHAPITRE 2. CONDITIONS DE CHAINES ET DE FINITUDE	41
I. Modules noethériens et artiniens	45
1. Ensembles ordonnés avec conditions de chaîne	45
2. Définition des modules noethériens et artiniens	46
3. Comportement par suites exactes	47
II. Anneaux noethériens	48
1. Définitions équivalentes	48
2. Modules noethériens sur un anneau non nécessairement noethérien	50
3. Caractérisation d'un anneau noethérien par des idéaux premiers	50
4. Un théorème de Hilbert	51
5. Anneaux et modules cohérents	55

III. Modules de longueur finie	61
IV. Anneaux artiniens	65
1. Définition et exemples	65
2. Spectre premier d'un anneau artinien	65
3. Nilradical et radical d'un anneau artinien	66
4. Une caractérisation des anneaux artiniens	68
V. Généralités sur les anneaux factoriels	71
1. Définitions	71
2. Le théorème de Gauss	76
3. Application aux courbes algébriques planes	77
 CHAPITRE 3. IDEAUX PREMIERS ASSOCIES. DECOMPOSITION PRIMAIRE	 93
I. Idéaux premiers associés	96
1. Diviseurs de zéro d'un module	96
2. Exemple d'idéal premier associé mais non fortement associé	99
3. Idéaux premiers associés et support	103
4. Diviseurs de zéro et éléments nilpotents	104
II. Décomposition primaire	105
1. Idéaux premiers associés d'un module de type fini sur anneau noethérien	105
2. Sous-modules irréductibles	107
3. Décompositions primaires réduites	109
4. Décompositions primaires des idéaux	112
5. Quelques contre-exemples classiques sur les idéaux primaires	113
6. Anneau total des fractions d'un anneau noethérien réduit	115
III. Support, idéaux premiers associés et changement d'anneaux	116
1. Support et changement d'anneaux	117
2. Idéaux premiers associés et changement d'anneaux	117
 CHAPITRE 4. EXTENSIONS D'ANNEAUX. DEPENDANCES ALGEBRIQUE ET INTEGRALE	 129
I. Eléments transcendants, algébriques, entiers	133
1. Définitions	133

2. Caractérisation des éléments entiers	135
3. Changement de base	138
4. Polynôme caractéristique d'un entier algébrique	140
5. Le premier théorème de Cohen-Seidenberg	142
II. Interprétation de la notion d'entier en termes de places ou de valuations	145
1. Places et anneaux de valuation	145
2. Une caractérisation des anneaux de valuation	147
3. Caractérisation des entiers en termes de places et valuations	150
III. Anneaux intégralement clos	153
1. Exemples d'anneaux intégralement clos. Anneaux d'entiers algébriques	153
2. Deux propriétés des anneaux intégralement clos	155
 CHAPITRE 5. ELEMENTS DE THEORIE DES CORPS COMMUTATIFS	 167
I. Extensions algébriques et transcendantes	170
1. Définitions et rappels	170
2. Sous-extensions d'une extension de corps	175
3. Bases de transcendance	178
4. Le théorème de Luröth	184
II. Construction de quelques extensions remarquables	187
1. Corps de rupture d'un polynôme	187
2. Corps de décomposition d'un polynôme	190
3. Clôture algébrique d'un corps	191
4. Corps finis	194
5. Anneau de décomposition d'un polynôme unitaire	198
III. Eléments de théorie de Galois des extensions finies	200
1. Extensions normales (ou quasi-galoisiennes)	202
2. Extensions séparables	204
3. Elément primitif	208
4. Le théorème fondamental de la théorie de Galois des extensions finies	210
5. Etude d'exemples	214
6. Fermeture galoisienne d'une extension algébrique séparable	224
IV. Extensions inséparables	226

1. Extensions radicielles (ou purement inséparables)	227
2. Notion de p-Base	232

CHAPITRE 6. ELEMENTS DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE 251

I. Eléments de géométrie algébrique affine	254
1. Introduction	254
2. Ensembles algébriques affines	255
3. Caractérisation des idéaux de définition. Théorème des zéros de Hilbert	257
4. Topologie de Zariski	260
5. Ensembles algébriques irréductibles	262
6. Algèbre affine d'un ensemble algébrique. Point générique d'une variété algébrique	265
7. Points géométriques. Spectre premier d'une algèbre affine	268
8. Morphismes d'ensembles algébriques	271
9. Fonctions rationnelles sur une variété. Anneau local d'un point	274
II. Spectre d'un anneau	276
1. Spectre d'un anneau	277
2. Propriétés topologiques caractéristiques d'un spectre d'anneau	279
3. Spectre d'un produit fini d'anneaux. Connexité	282
4. Notion de schéma affine	285
III. Spectre maximal. Anneaux de Jacobson	291
IV. Eléments de géométrie algébrique projective	296
1. Espaces projectifs. Ensembles algébriques projectifs	296
2. Structure de variété topologique de l'espace projectif. Complétion projective d'un ensemble algébrique affine	299

CHAPITRE 7. HOMOMORPHISMES D'ANNEAUX ET MORPHISMES D'ENSEMBLES ALGEBRIQUES 311

I. Fibres d'un homomorphisme d'anneaux. Cas d'un homomorphisme entier	314
1. Fibres d'un homomorphisme	314
2. Interprétation topologique de la notion d'homomorphisme entier	316

3. Action d'un groupe d'automorphismes sur une fibre. Deuxième théorème de Cohen-Seidenberg	318
II. Algèbres de type fini sur un corps. Lemme de normalisation	320
1. Automorphismes d'une algèbre de polynômes à coefficients dans un corps	321
2. Lemme de normalisation	322
3. Normalisation	326
III. Ensembles constructibles. Définition et caractérisation	328
1. Définition et caractérisation des ensembles constructibles	328
2. Le théorème de Chevalley	330
 CHAPITRE 8. TOPOLOGIES A-ADIQUES. COMPLETION	 339
I. Filtrations. Lemme d'Artin-Rees	342
1. Filtrations	342
2. Le lemme d'Artin-Rees	346
3. Applications du lemme d'Artin-Rees	348
II. Complétion	351
1. Séparé d'un module filtré	352
2. Cas des filtrations a-adiques	359
3. Utilisation des limites projectives	363
III. Propriétés de transfert	366
1. Gradué associé à un module filtré	366
2. Propriétés d'un module filtré et du gradué associé	368
IV. Quasi-finitude et finitude	373
V. Le critère local de platitude	377
 CHAPITRE 9. DERIVATIONS ET DIFFERENTIELLES	 387
I. Définition des dérivations et différentielles	391
1. Définition des dérivations	391
2. Exemples de dérivations	393
3. Première construction du module des différentielles	395
4. Deuxième construction du module des différentielles	396
II. Propriétés et calculs des modules de dérivations et différentielles	399
1. Changement de base et localisation	399

2. Produits et limites inductives filtrantes	402
3. Deux suites exactes	403
4. Prolongement des dérivations	406
5. Application au calcul de certains modules de différentielles	408
III. Extensions séparables	410
1. Compléments sur les extensions algébriques séparables	410
2. Algèbres séparables sur un corps	412
3. Extensions séparablement engendrées. Le critère de Mac-Lane	415
4. Degré de transcendance et dimension de l'espace vectoriel des différentielles d'une extension de corps	417
APPENDICE. ESPACES SPECTRAUX	429
I. La topologie constructible	431
II. Sources	433
III. Conclusion	443
Bibliographie	445
Index	449