

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES

1. ANNEAUX DE POLYNÔMES

1. Construction des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Coefficients. Degré total. Polynôme homogène.	14
2. Propriété universelle de $A[X_1, \dots, X_n]$ et ses conséquences. Algèbre de type fini sur un anneau commutatif. Zéros d'un polynôme. Racines. Degré partiel. Corps des fractions rationnelles en n indéterminées sur un corps donné.	17
3. Division euclidienne. Fonctions polynômiales.	19
4. Dérivation. Dérivation des polynômes. Identité d'Euler. Formule de Taylor en caractéristique nulle.	21
5. Polynômes symétriques. Polynômes symétriques élémentaires. Algèbre des invariants du groupe symétrique \mathcal{S}_n opérant linéairement sur $A[X_1, \dots, X_n]$	23

2. IDÉAUX PREMIERS ET LOCALISATION

1. Idéaux premiers. Idéaux maximaux. Correspondance entre idéaux premiers d'un anneau et idéaux d'une image homomorphe. Lemme d'évitement des idéaux premiers.	25
2. Racine d'un idéal — Nilradical. Élément nilpotent.	26
3. Anneaux de fractions. Partie multiplicative d'un anneau. Homomorphisme naturel d'un anneau dans un anneau de fractions. Propriété universelle.	27
4. Modules de fractions.	28
5. Correspondance entre idéaux de A et idéaux de $S^{-1}A$	29
6. Anneau local. Radical de Jacobson. Anneau local. Localisé d'un anneau en un idéal premier. Lemme de Nakayama.	31

3. ANNEAUX FACTORIELS — RÉSULTANT

1. Relation de divisibilité — Anneaux factoriels. Valuation discrète. PGCD et PPCM. Conservation de la factorialité par passage aux fractions.	33
2. Anneaux principaux. Condition pour qu'un anneau factoriel soit principal. Identité de Bézout dans $K[X]$ (K un corps)	37
3. Factorialité des anneaux de polynômes. Lemme de Gauss. Critère d'irréductibilité d'Eisenstein.	39
4. Résultant de deux polynômes à coefficients dans un anneau factoriel. Condition pour que deux polynômes aient un facteur commun non constant. Discriminant d'un polynôme. Expression du résultant en fonction des racines.	41

4. ENTIERS ALGÈBRIQUES

1. **Dépendance intégrale.** Élément entier sur un anneau. Fermeture intégrale. Anneau entier sur un autre anneau. Transitivité de la relation de dépendance intégrale. Comportement de la dépendance intégrale relativement au passage aux quotients et au passage aux anneaux de fractions. 46

2. **Cas des anneaux intègres.** Clôture intégrale. Anneau intégralement clos ; exemple des anneaux factoriels. Conditions pour qu'un anneau intègre soit intégralement clos. 48

3. **Théorème de montée.** Dimension d'un anneau. Hauteur d'un idéal premier. 49

5. EXTENSIONS DE CORPS

1. **Éléments, extensions algébriques ; extensions transcendantes ; extensions monogènes.** Degré d'une extension. Multiplicativité des degrés. Extensions de degré fini ; extensions de type fini. Forme faible du théorème des zéros de Hilbert. 53

2. **Constructions par la règle et le compas.** 56

3. **Corps algébriquement clos. Corps de décomposition d'un polynôme.** Clôture algébrique. Unicité de la clôture algébrique à isomorphisme près. Anneau de polynômes sur un anneau intégralement clos. 58

4. **Degré et base de transcendance.** Extension transcendante pure. 63

5. **Théorème de normalisation.** Dimension d'un anneau de polynômes sur un corps. Dimension d'une algèbre intègre de type fini sur un corps. Caténarité d'une algèbre intègre de type fini sur un corps. 65

6. THÉORÈME DE L'ÉLÉMENT PRIMITIF. SÉPARABILITÉ, NORME ET TRACE

1. **Racines de l'unité.** Indicateur d'Euler. Polynômes cyclotomiques. 71

2. **Corps finis.** Théorème de l'élément primitif pour les corps finis. Théorème de Wedderburn. 75

3. **Théorème de l'élément primitif en caractéristique 0 et séparabilité.** Élément primitif. Polynôme séparable. Extension séparable. 76

4. **Décomposition des extensions algébriques ; extensions séparables et extensions radicielles.** Degré séparable. Élément radiciel. Extension radicielle. Clôture radicielle. Corps parfait. Degré inséparable. 80

5. **Généralisation aux algèbres de la notion de séparabilité.** Extension des scalaires d'un module. Produit tensoriel d'algèbres commutatives. Algèbre séparable sur un corps. 84

6. **Normes et traces.** Définitions et propriétés. Discriminant d'une base d'une extension de K . Description des corps quadratiques et de leurs anneaux d'entiers. 87

7. CORRESPONDANCE DE GALOIS ET APPLICATIONS

1. **Extension normale.** Groupe fini d'automorphismes d'un corps. Fermeture normale d'une extension de degré fini. 94

2. **Correspondance de Galois.** Groupe de Galois. Extension Galoisienne. 97

3. **Le théorème de descendance.** 98

4. **Extensions galoisiennes à groupe de Galois abélien en caractéristique 0.** Théorème 90 de Hilbert. Réductibilité des équations $X^n - a$ 100

5. **Résolution des équations par radicaux.** Extension radicale. Equation résoluble par radicaux. 103

6. **Le polynôme générique de degré n .** Résolution des équations de degré 2, 3, 4. 106

7. **Construction des polygones réguliers et nombres de Fermat.** 110

8. CORPS ORDONNÉS

1. Structure d'ordre sur un anneau. Cône positif.	114
2. Corps ordonnés. Extension ordonnée. Théorème d'Artin-Schreier.	115
3. Corps ordonnés maximaux. Théorème d'Euler-Lagrange.	118

9. ANNEAUX NOETHÉRIENS

1. Modules noethériens.	120
2. Anneaux noethériens. Conservation de la noethérianité par passage aux quotients et aux fractions. Décomposition d'un idéal égal à son radical en intersection finie d'idéaux premiers.	121
3. Anneaux de polynômes sur un anneau noethérien.	123
4. Anneaux artiniens. Suite de Jordan-Hölder d'un module de longueur finie. Modules artiniens.	125
5. Le théorème de l'Idéal principal (de Krull). Générateurs des idéaux maximaux d'une algèbre de polynômes sur un corps. Clôture intégrale d'une algèbre intègre de type fini sur un corps.	129
6. Anneaux de Dedekind. Théorème de Krull-Akizuki. Idéaux fractionnaires. Groupe des classes de diviseurs. Lemme d'approximation dans les anneaux de Dedekind.	132

10. ANNEAUX ET MODULES GRADUÉS. FILTRATIONS
ET COMPLÉTIONS I-ADIQUES. ANNEAUX DE SÉRIES FORMELLES

1. Anneaux et modules gradués. Élément homogène. Composantes homogènes. Homomorphismes de modules gradués. Sous-modules gradués. Graduation quotient. Idéaux gradués. Idéaux gradués premiers. Théorème d'Artin Rees. Théorème d'intersection de Krull.	139
2. Anneaux et modules filtrés. Filtration I-adique. Filtration induite. Filtration séparée. Fonction d'ordre. Topologie définie par une filtration. Topologie I-adique. Anneau de Zariski.	143
3. Graduation associée à une filtration. Forme initiale.	144
4. Complétés des anneaux et des modules filtrés. Complétés séparés. Suites cohérentes. Système projectif de groupes, d'anneaux et de modules. Limite projective.	146
5. Séries formelles. Ordre d'une série formelle. Noethérianité des anneaux de séries formelles.	154
6. Théorèmes de Préparation et de Division de Weierstrass. Factorialité des anneaux de séries formelles sur un corps.	157

11. ALGÈBRES DE TYPE FINI SUR UN CORPS ALGÈBRIQUEMENT CLOS

1. Théorème des zéros de Hilbert et ensembles algébriques affines. Espace affine. A_k^n . Equations d'un ensemble algébrique affine. Topologie de Zariski.	162
2. Ensembles algébriques irréductibles et idéaux premiers. Composantes irréductibles.	165
3. Fonctions et applications régulières Anneaux de coordonnées. Homomorphisme d'évaluation. Comorphisme.	166
4. Définition intrinsèque des ensembles algébriques affines. Sous-variété. Ouvert principal. Produit de variétés algébriques affines.	169
5. Corps des fonctions rationnelles — Applications rationnelles. Application rationnelle dominante. Dimension. Courbe. Surface. Hypersurface. Dimension d'un produit de variétés algébriques affines. Interprétation en géométrie affine du théorème des idéaux principaux.	174
6. Courbes algébriques planes et paramétrisation. Courbe rationnelle. Théorème de Lüroth.	179

7. **Espaces projectifs et théorème des zéros de Hilbert homogène.** Espace projectif associé à un espace vectoriel. \mathbb{P}_K^n . Coordonnées homogènes. Coordonnées non homogènes relativement à un ouvert affine. Ensemble algébrique projectif. Topologie de Zariski. Variété projective. Composantes irréductibles. Corps des fonctions rationnelles d'une variété projective. Dimension. Changement de coordonnées projectives. Homogénéisé d'un polynôme. Polynôme deshomogénéisé. Relations entre sous-ensembles algébriques de A_K^n et ceux de \mathbb{P}_K^n 182
8. **Application du résultant à l'étude de l'intersection des courbes dans le plan projectif.** 188

12. VALEURS ABSOLUES

1. **Définition d'une valeur absolue. Valeurs absolues équivalentes.** Corps valué. Norme d'une valeur absolue. Diviseur premier. Diviseur trivial. Restriction et extension d'une valeur absolue. 191
2. **Théorème d'approximation.** 195
3. **Classification des diviseurs premiers : diviseurs archimédiens et non archimédiens.** Anneau de valuation. Idéal maximal. Groupe des unités. Corps résiduel. Valuation d'un corps. Groupe des valeurs d'une valuation. Valuation normalisée. Uniformisante. 196
4. **Les diviseurs premiers de \mathbb{Q} .** Formule du produit sur \mathbb{Q} 200

13. COMPLÉTION

1. **Corps complet pour une valeur absolue.** Complété. 203
2. **Espaces vectoriels normés sur un corps valué complet.** 206
3. **Lemme de Hensel.** 207
4. **Approximation des racines d'un polynôme.** 211
5. **Corps complets archimédiens.** Théorème d'Ostrowski. 212
6. **Corps complet pour un diviseur premier non archimédien discret.** 215
7. **Valeurs absolues non archimédiennes discrètes à corps résiduel fini.** Valeur absolue normalisée. Développement de Hensel. 216

14. PROLONGEMENTS DE VALEURS ABSOLUES

1. **Valuations : ramification et degré résiduel.** 220
2. **Prolongement de la valeur absolue d'un corps complet.** 224
3. **Extension de diviseurs premiers non archimédiens discrets.** 225
4. **Extension des valeurs absolues dans le cas général.** Degré local. Norme locale. Trace locale. 226
5. **Formule du produit dans les corps de nombres.** Corps de nombres algébriques. 229

15. UNITÉS ET CLASSES DANS LES CORPS ET NOMBRES

1. **Corps de nombres : idèles et idéaux.** Adèles. 233
2. **Parallélotopes et Théorème d'Artin-Whaples.** Volume d'une idèle. Mesure d'un parallélotope. 236
3. **Finitude du groupe des classes de diviseurs.** 240
4. **Le théorème des unités.** Groupe des unités absolues. Unités fondamentales. Théorème de Dirichlet. Groupes des unités des corps quadratiques. 241

- BIBLIOGRAPHIE** 246
- INDEX** 247