

Inhaltsverzeichnis.

Erster Theil.

Processe für invariante Bildungen.

§ 1. Lineare Transformation und Faltungsprocess.

Absatz		Seite
1—2.	Einführung der Symbolik	1
3.	Lineare Transformation	3
4.	Cogredienz und Contragredienz	4
5.	Definition der Invarianten	5
6.	Definition der Covarianten	6
7.	Beispiele simultaner Invarianten und Covarianten.	7
8.	Eigenschaften der In- und Covarianten, die sich aus dem symbolischen Producte direct erkennen lassen	8
9.	Definition des Faltungsprocesses.	10
10.	Zusammenhang der durch Faltung entstehenden Producte	11
11.	Identitäts- und Productsatz	12
12.	Ein Beispiel symbolischer Rechnung	14

§ 2. Process der Polarenbildung.

13.	Definition der Polare einfacher Formen	17
14—19.	Unsymbolische Methoden für den Polarenprocess	18
20.	Der Omegaprocess	22
21—23.	Polaren eines Productes von Formen	24
24—25.	Benachbarte Glieder von Polaren eines Productes von zwei Formen	25
26—27.	Beispiele	27
28.	Unsymbolische Methode für den Polarenprocess bei mehr als zwei Formen.	30
29.	Beispiele	30
30.	Benachbarte Glieder von Polaren eines Productes von mehr als zwei Formen.	31
31.	Polaren mit mehr als zwei Reihen cogredienter Variabler.	32

§ 3. Ueberschiebungsprocess.

32.	Definition	33
33.	Der Omegaprocess und die Ueberschiebung	34
34.	Ueberschiebung der Polaren zweier Formen	35
35.	Unsymbolische Darstellung der Ueberschiebung zweier Formen.	35
36—37.	Beispiele	37

Absatz		Seite
38.	Ueberschiebung von Producten	39
39.	Beispiele	40
40—41.	Ueberschiebung der Polaren von Producten von Formen	41
42—43.	Benachbarte Glieder	43
44.	Differenz der Ueberschiebung und eines Gliedes	47
45—46.	Darstellung eines symbolischen Productes als Summe von Ueberschiebungen	48
§ 4. Die einfachsten Ueberschiebungen.		
47—48.	Die Functionaldeterminante zweier Formen	50
49.	Die Functionaldeterminante der zweiten Polaren dreier Formen	53
50.	Relation zwischen drei und vier binären Formen	54
51.	Die Functionaldeterminante (f, φ) und die erste Polare $(f \cdot \varphi)_y$	55
52—53.	Functionaldeterminanten von Functionaldeterminanten	56
54—55.	Die Hesse'sche Covariante	58
§ 5. Der Aronhold'sche Process.		
56—57.	Definition des Aronhold'schen Processes bei unabhängigen Formen	60
58—59.	Beispiele	62
60—61.	Darstellung des A. Processes an einem symbolischen Product	64
62.	Aronhold'scher Process, wenn f und φ covariant sind	66
63—64.	Beispiel	68
§ 6. Combinanten.		
65.	Definition der Combinante	70
66.	Combinanten eines Systemes unabhängiger Formen	70
67.	Beispiel	71
68.	Ueber eine formale Eigenschaft der Combinanten	72
69.	Combinanten abhängiger Formen	73
70—73.	Beweise für deren Combinanteneigenschaft $J_{f+\lambda\varphi} = u \cdot i$	75
§ 7. Process der Reihenentwicklung.		
74.	Symbolische Darstellung von Formen F' mit zwei Reihen Variabler	78
75.	Die Elementarcovarianten von F'	80
76.	Zusammenhang von F' mit den Elementarcovarianten	81
77—81.	Reihenentwicklung von F' nach Potenzen von (xy)	81
82.	Beispiele	86
83—84.	Verallgemeinerung der Reihenentwicklung	87
85.	Alternirende und symmetrische Formen	88
86—87.	Umkehrung der Reihe	89
§ 8. Anwendungen des Processes der Reihenentwicklung.		
88.	Zweck der Reihenentwicklung	90
89.	Ueberschiebungen der Form $f = a_x^4$ über ihre Covariante $\mathcal{A} = (ab)^2 a_x^2 b_x^2$	91
90—92.	Die aszygetischen Covarianten dritten Grades in den Coefficienten von $f = a_x^5$	93
93.	Reciprocitätssatz von Hermite	97
94—97.	Darstellung einer in den Wurzeln von $\varphi = A_x^m$ ausgedrückten Covariante durch ein symbolisches Product	98

Absatz		Seite
98.	Ueber eine Eigenschaft gewisser Covarianten dritten Grades in den Coefficienten von $f = a'''x$	105
99.	Ueber die Cayley'sche resp. Bézout'sche Methode der Discriminantenbildung.	108
§ 9. Beweis, dass jede In- und Covariante durch ein symbolisches Product darstellbar ist.		
100.	Formulirung der Aufgabe für binäre Formen	110
101.	Umformung der Definitionsgleichung einer Invariante	111
102.	Erster Beweis.	112
103.	Zweiter Beweis	113
104—106.	Verallgemeinerung des zweiten Beweises.	114
§ 10. Partielle Differentialgleichungen für In- und Covarianten.		
107.	Aufstellung der Differentialgleichungen, denen die Invariante i einer einzigen Form genügt	119
108.	Das System von Differentialgleichungen ist vollständig	122
109—110.	Differentialgleichungen für simultane Co- und Invarianten.	123
111.	Begriff der Evectante	127
112.	Beispiel	127
113.	Symbolische Darstellung des Evectantenprocesses.	128
114.	Umformung der Differentialgleichungen	128
115.	Evectanten von Combinanten	129
116.	Zweite Methode zur Aufstellung der Differentialgleichungen	130
117.	Ueber eine Anwendung des Evectantenprocesses	132

Zweiter Theil.

Die Formen zweiten, dritten und vierten Grades.

§ 11. Die Form zweiten Grades: System einer und zweier simultaner Formen.		
118.	Ueberblick über die folgenden Untersuchungen	135
119.	System einer quadratischen Form.	136
120.	Auflösung der quadratischen Gleichung	137
121.	Discriminante der quadratischen Form.	138
122—126.	Aufstellung des simultanen Systemes zweier quadratischer Formen	138
127.	Tabelle der Relationen zwischen den Formen dieses Systemes.	143
128.	Bedingung, dass zwei quadratische Formen einander proportional	143
129.	Bedingung, dass zwei quadratische Formen einen gemeinsamen linearen Factor haben	144
130.	Kanonische Form zweier simultaner quadratischer Formen.	145
§ 12. Die Formen zweiten Grades: System dreier und mehr simultaner Formen.		
131—133.	Das simultane System dreier quadratischer Formen.	147
134—135.	Relationen zwischen den Formen des Systemes.	151
136.	Das simultane System von n quadratischen Formen	155

Absatz	§ 13. Specielle quadratische Formen.	Seite
137.	Conjugirte quadratische Formen	156
138.	Kanonische Form dreier conjugirter Formen (Octaeder)	156
139—141.	Die vier quadratischen Formen des Würfels	158
142.	a) Relationen zwischen den vier Formen	161
	b) Die sechs quadratischen Formen des Icosaeders	163
§ 14. Die Form dritten Grades.		
143.	Einleitende Bemerkungen.	167
144—147.	Die Reducenten dieses Systemes	168
148.	Tabelle der Formen des Systemes und der Werthe ihrer Ueberschiebungen.	172
149.	Das Formensystem von $Q + \lambda f$	173
150.	Beispiele	173
151.	Die Discriminante	174
152—154.	Auflösung cubischer Gleichungen	175
§ 15. Das Formensystem der Form vierten Grades.		
155.	Die fundamentalen In- und Covarianten	178
156—161.	Beweis der Endlichkeit dieses Systemes von Covarianten	179
162.	Die Fundamentalrelation zwischen den fünf Formen des Systemes	182
163—168.	Die Ueberschiebungen von t über sich selbst und über f und Δ	183
§ 16. Anwendung des Aronhold'schen Processes auf das Formensystem der Form vierten Grades.		
169.	Wirkung des Processes auf die Grundformen.	186
170.	Die Combinanten von $\varphi = kf + \lambda \Delta$	188
171.	Berechnung von $\Delta\varphi$	188
172.	Berechnung von i_φ und j_φ	189
§ 17. Die Gleichung vierten Grades.		
173.	Die Discriminante	191
174—175.	Die Cayley'sche Auflösung der Gleichung vierten Grades	192
176.	Bedingung, dass $f = a_x^4 = 0$ drei gleiche Wurzeln hat	195
177.	Bedingung, dass $f = a_x^4 = 0$ ein vollständiges Quadrat ist	196
§ 18. Normalform von $f = a_x^4$; Transformation in die Normalform.		
178.	Formensystem der Normalform	198
179.	Transformation in die Normalform $x_1^4 + 6m x_1^2 x_2^2 + x_2^4$	199
180.	Berechnung des Parameters m der Normalform.	200
181.	Berechnung des Moduls der Transformation aus dem Parameter m	201
182.	Rationale Transformation der biquadratischen Form	202
183.	Das Doppelverhältniss der vier Wurzeln von $a_x^4 = 0$	203
§ 19. Ueber die Formen, für welche $(f, f)^4 = 0$.		
184.	Einleitende Bemerkungen.	204
185.	Die Coefficientenrelationen, die aus $(f, f)^4 = 0$ hervorgehen.	204
186—187.	Die Formen mit mehrfachen Wurzeln	206

Absatz		Seite
188.	Die Formen f ohne mehrfache Wurzeln	209
189.	Die Formen des Tetraeders und Octaeders	210
190.	Die Ikosaederform	212
191.	Allgemeine Betrachtungen über reguläre Körper	213
192.	Octaederirrationalität	214
193.	Tetraederirrationalität	215
194.	Auflösung der Octaedergleichung	216
195.	Auflösung der Gleichung vierten Grades	217

Dritter Theil.

**Systeme einzelner und simultaner Formen
höheren Grades.**

§ 20. Ueberschiebung von Systemen.

196.	Begriff des Systemes im Allgemeinen	221
197—198.	Ueberschiebung zweier Systeme	221
199.	Lehrsatz über das System, welches durch Ueberschiebung zweier endlichen Systeme entsteht	223
200.	Begriff des vollständigen Systemes	224
201.	Lehrsatz über das System, welches durch Ueberschiebung zweier vollständiger Systeme entsteht	225
202.	Begriff des relativ vollständigen Systemes	227
203—204.	Zwei Lehrsätze über relativ vollständige Systeme	227

§ 21. Beweis für die Endlichkeit des Formensystemes
einer binären Form.

205.	Gedankengang des Beweises	231
206.	Aufstellung der Hilffsysteme ($B^{(k)}$)	232
207.	Eigenschaft derselben	233
208.	Zusammenfassung der Begriffe	235
209.	Beweis der Endlichkeit	235

§ 22. Das Formensystem der Form fünfter
Ordnung.

210.	Aufstellung der Systeme ($A^{(k)}$) und ($B^{(k)}$)	236
211—212.	Ueberschiebung derselben	237
213.	Tabelle der 23 Formen des Systemes	240
214.	Uebernommene Formen	241
215.	Definition der Form j	242
216—220.	Ersetzung der Formen des Systemes durch eines ihrer Glieder	243
221.	Tabelle der nummehr für gewisse Formen des Systemes eingeführten symbolischen Producte	247

§ 23. Relationen zwischen den Formen des Systemes.

222.	Die Quadrate der vier linearen Covarianten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$	247
223.	Die sechs simultanen Invarianten M, N, P, R etc. derselben	248
224.	Berechnung von N	249

Absatz		Seite
225.	Beweis der Relation $(f, \tau)^2 = - \left\{ \frac{2}{3} A j + i \alpha \right\}$	249
226.	Berechnung von M	250
227.	Die Ueberschiebungen der quadratischen Formen i, τ, ϑ über- einander	251
228.	Die Ueberschiebungen von ϑ über $\alpha, \beta, \gamma, \delta$	252
§ 24. Typische Darstellung der Form fünften Grades.		
229.	Begriff der typischen Darstellung	253
230.	Die Ueberschiebungen $(f, \alpha^q)^2$	254
231.	Berechnung der typischen Coefficienten	255
232.	Typische Darstellung der Form j	256
233.	Darstellung von $f = \alpha_x^2$ durch drei fünfte Potenzen.	257
234—235.	Typische Darstellung der Form f , wenn $C = 0$	258
236—237.	Die Invariante C ist gleich der Resultante von j und i	260
238.	Typische Darstellung von f , wenn $B = 0$	268
239.	Beweis des Hilfssatzes hiezu: $(f, \gamma) = \frac{3}{2} \tau^2 + B \cdot (f, j)^2$	263
240.	Berechnung der typischen Coefficienten, wenn $B = 0$	265
§ 25. Die Discriminante und Auflösung der Gleichung fünften Grades.		
241—242.	Zwei Methoden zur Berechnung der Discriminante	266
243.	Auflösung specieller Gleichungen fünften Grades	269
244.	Erster Fall: $R = 0, M \geq 0, N \geq 0$	270
245—246.	Zweiter Fall: $R = 0, M = 0, N = 0$, also auch $\alpha = 0$	270
247.	Dritter Fall: $A = 0, B = 0, C = 0, \alpha = 0, j \geq 0$	273
248.	Vierter Fall: $B = 0, C = 0, \alpha = 0, j = 0, A \geq 0$	273
249.	Fünfter Fall: $A = 0, B = 0, C = 0, \alpha = 0, j < 0$	274
§ 26. Das Formensystem der Form sechsten Grades.		
250.	Aufstellung der Systeme $(A^{(i)})$ und $(B^{(i)})$	275
251.	Methode der Ueberschiebung derselben	275
252—257.	Die Reducenten	276
258.	Rückblick.	279
259—260.	Ermittelung der Formen des vollständigen Systemes	280
261.	Tabelle der Formen des Systemes.	283
§ 27. Relationen zwischen Formen des Systemes.		
262.	Einführung von Ueberschiebungsgliedern an Stelle der Ueber- schiebungen.	283
263.	Die sechs quadratischen Formen des Systemes	284
264.	Die fünf Invarianten des Systemes	286
265.	Die zweiten Ueberschiebungen von \mathcal{A} und k über die quadrati- schen Formen l, m, n	286
266.	Die Ueberschiebungen von f über Producte von l, m, n	287
267.	Die Invarianten des simultanen Systemes l, m, n	290
268.	Die Relation für die schiefe Invariante	291

§ 28. Die Discriminante der Form sechsten Grades
und irrationale Relationen.

Absatz		Seite
269—271.	Berechnung der Discriminante	291
272.	Irrationale Relationen bei Combinanten	295
273—276.	Als Beispiel die Functional-determinante sechsten Grades zweier biquadratischer Formen f und φ	296
277.	Schlussbemerkungen	301

§ 29. Typische Darstellung der Form sechsten Grades.

278—280.	Typische Darstellung im allgemeinen Falle.	302
281.	Der specielle Fall $R = 0$	304

§ 30. Auflösung specieller Gleichungen sechsten Grades.

282.	Ueberblick	306
283.	Erster Fall: $R = 0, A_1, \geq 0$	307
284—292.	Zweiter Fall: $R = 0, A_{1r} = 0$	308
293.	Dritter Fall: $A = 0, C = 0$	318
294.	Vierter Fall: $B = \frac{7}{50} A^2, C = -\frac{9}{500} A^3$	319

§ 31. Simultanes System einer quadratischen
und cubischen Form.

295.	Allgemeine Betrachtungen	320
296—299.	Aufstellung des simultanen Systemes von $f = a_x^2$ und $\varphi = a_x^3$	321
300.	Einführung von Ueberschiebungsgliedern für die Formen des Systemes	323
301—303.	Relationen zwischen den Formen des Systemes	324
304.	Typische Darstellung: Allgemeiner Fall	327
305.	Typische Darstellung: Ausnahmefälle	328
306.	Resultante von f und φ	329

§ 32. Simultanes System zweier cubischer Formen.

307—309.	Aufstellung des Systemes.	330
310—314.	Die linearen Formen p und π des Systemes	334
315.	Die biquadratische Covariante ϑ	338
316.	Die cubischen und quadratischen Covarianten	339
317.	Die vier linearen Formen $(\mathcal{A}, p), (\mathcal{A}, \pi), (\mathcal{P}, p), (\mathcal{P}, \pi)$	340
318.	Anderweitige lineare Formen	340
319.	Die Invarianten	342
320—321.	Die Invariantenrelation für $2\Omega^2$ und $\Omega \cdot \mathcal{J}$	344
322.	Zusammenfassung	345

§ 33. Anwendungen des simultanen Systemes
zweier cubischer Formen.

323.	Typische Darstellung der quadratischen Covarianten $\mathcal{A}, \Theta, \mathcal{P}$	346
324.	Die typischen Coefficienten von f und φ	347
325—326.	Die typischen Darstellungen von f und φ sind gegeben durch die partiellen Differentialquotienten von $F = -8\Omega^3(f\pi + \varphi p)$	348

Absatz		Seite
327.	Die Resultante von f und φ	350
328—331.	Fälle, in denen die typische Darstellung unmöglich ist	350

§ 34. Die Schwesterformen.

332.	Einleitende Bemerkungen.	354
333.	Jedes symbolische Product ist gleich einer rationalen Function von Covarianten, deren Nenner eine Potenz von f ist	355
334.	Die Formen $\Psi_k = a_x^{n-k}(af)$ haben f als Factor	356
335.	Definition der Schwesterformen u_k	357
336—337.	Stellung der Schwesterformen zum vollen System	358
