

Table des matières

Avant-propos	1
Introduction	4
CHAPITRE 0	
Preliminaires	
§ 1. Foncteurs representables	19
1.1. Foncteurs representables	19
1.2. Produits fibres dans une categorie	25
1.3. Changement de base	31
1.4. Noyaux; morphisme diagonal	34
1.5. Foncteurs adjoints	38
1.6. Structures algebriques dans les categories	41
1.7. Morphismes fonctoriels representables	44
§ 2. Compléments de topologie	48
2.1. Espaces irreductibles	48
2.2. Espaces localement noetheriens	55
2.3. Ensembles quasi-constructibles et ensembles constructibles	55
2.4. Ensembles globalement constructibles dans les espaces noetheriens	58
2.5. Fonctions constructibles	61
2.6. Parties tres denses d'un espace topologique	62
2.7. Quasi-homeomorphismes	64
2.8. Espaces de Jacobson	67
2.9. Espace sobre associe a un espace topologique	67
2.10. Applications ouvertes en un point	70
§ 3. Compléments sur les faisceaux	72
3.1. Faisceaux a valeurs dans une categorie	72
3.2. Prefaisceaux sur une base d'ouverts	74
3.3. Recollement de faisceaux	77
3.4. Images directes de prefaisceaux	78

3.5.	Images réciproques de préfaisceaux	80
3.6.	Faisceaux simples et faisceaux localement simples	83
3.7.	Images réciproques de préfaisceaux de groupes ou d'anneaux	84
3.8.	Quasi-homéomorphismes et images réciproques de faisceaux	85
3.9.	Faisceaux d'espaces pseudo-discrets	86
§ 4.	Espaces annelés	87
4.1.	Espaces annelés, \mathcal{A} -Modules, \mathcal{A} -Algèbres	87
4.2.	Image directe d'un \mathcal{A} -Module	94
4.3.	Image réciproque d'un \mathcal{B} -Module	96
4.4.	Relations entre images directes et images réciproques	99
4.5.	Immersiones ouvertes et morphismes représentables par des immersiones ouvertes	102
§ 5.	Faisceaux quasi-cohérents et faisceaux cohérents	107
5.1.	Faisceaux quasi-cohérents	107
5.2.	Faisceaux de type fini	108
5.3.	Faisceaux cohérents	111
5.4.	Faisceaux localement libres	115
5.5.	Modules localement libres sur un espace localement annelé	119
5.6.	Groupe de Picard	124
5.7.	Morphismes plats d'espaces annelés	126
§ 6.	Compléments d'algèbre commutative	128
6.1.	Limites inductives d'anneaux	128
6.2.	Identification du module M_f à une limite inductive	131
6.3.	Propriétés de finitude	131
6.4.	Critères pour qu'un anneau soit noethérien	140
6.5.	Anneaux normaux et fermeture intégrale	145
6.6.	Compléments sur la platitude	152
6.7.	Compléments sur les modules projectifs	165
6.8.	Existence d'extensions plates d'anneaux locaux	168
§ 7.	Compléments d'algèbre topologique	170
7.1.	Anneaux admissibles	170
7.2.	Anneaux adiques et limites projectives	174
7.3.	Anneaux préadiques noethériens	178
7.4.	Modules quasi-finis sur les anneaux locaux	179
7.5.	Anneaux de séries formelles restreintes	180
7.6.	Anneaux complets de fractions	182
7.7.	Produits tensoriels complétés	187
7.8.	Topologies sur les modules d'homomorphismes	191

CHAPITRE I

Le langage des schémas

Sommaire	193
§ 1. Schémas affines	194
1.1. Le spectre d'un anneau	194
1.2. Propriétés fonctorielles des spectres premiers d'anneaux	196
1.3. Faisceau associé à un module	197
1.4. Faisceaux quasi-cohérents sur un spectre premier	205
1.5. Faisceaux cohérents sur un spectre premier	209
1.6. Schémas affines et morphismes d'espaces localement annelés dans des schémas affines	209
1.7. Images directes et images réciproques de faisceaux quasi-cohérents par des morphismes de schémas affines	212
§ 2. Schémas et morphismes de schémas	215
2.1. Définition des schémas	215
2.2. Faisceaux quasi-cohérents sur un schéma	217
2.3. Morphismes de schémas	219
2.4. Recollement de schémas	222
2.5. Schémas locaux	223
2.6. Schémas au-dessus d'un schéma	226
2.7. Schémas noethériens et schémas localement noethériens	228
2.8. Schémas artiniens	230
§ 3. Produit et somme de schémas. Changement de base	230
3.1. Somme de schémas	230
3.2. Produit de schémas	231
3.3. Produit tensoriel de Modules quasi-cohérents sur un produit de schémas	237
3.4. Changement de base; fibres	239
3.5. Point d'un schéma à valeurs dans un schéma; points géométriques	242
3.6. Morphismes surjectifs	244
3.7. Morphismes radiciels	246
3.8. Morphismes universellement ouverts, universellement fermés, universellement bicontinus	249
3.9. Morphismes générissants	252
3.10. Morphismes submersifs et universellement submersifs	256
§ 4. Sous-schémas et morphismes d'immersion. Schémas réduits	257
4.1. Sous-schémas	257
4.2. Morphismes d'immersion	260
4.3. Image réciproque d'un sous-schéma	263

4.4.	Immersiones locales et isomorphismes locaux	266
4.5.	Nilradical. Schémas réduits	268
4.6.	Existence d'un sous-schéma d'espace sous-jacent donné	273
§ 5.	Morphismes séparés. Critères valuatifs	274
5.1.	Diagonale d'un S-schéma	274
5.2.	Morphismes et schémas séparés	277
5.3.	Critères de séparation	279
5.4.	Morphismes schématiquement dominants et sous-schémas schématiquement denses	283
5.5.	Critères valuatifs	285
§ 6.	Conditions de finitude relatives	290
6.1.	Morphismes quasi-compacts et morphismes quasi-séparés	290
6.2.	Morphismes localement de type fini et morphismes localement de présentation finie	297
6.3.	Morphismes de type fini et morphismes de présentation finie	304
6.4.	Schémas de Jacobson et anneaux de Jacobson	307
6.5.	Schémas algébriques et localement algébriques	308
6.6.	Détermination locale d'un morphisme	311
6.7.	Image directe d'un faisceau quasi-cohérent	313
6.8.	Prolongement de sections de faisceaux quasi-cohérents	315
6.9.	Prolongement des faisceaux quasi-cohérents	316
6.10.	Image schématique d'un schéma. Adhérence schématique d'un sous-schéma	324
6.11.	Morphismes quasi-finis	325
§ 7.	Ensembles constructibles dans les schémas	327
7.1.	Morphismes de présentation finie et ensembles constructibles	327
7.2.	Ensembles pro-constructibles et ind-constructibles	331
7.3.	Applications aux morphismes génériques	339
§ 8.	Applications rationnelles	342
8.1.	Applications rationnelles et fonctions rationnelles	342
8.2.	Domaine de définition d'une application rationnelle	346
8.3.	Faisceau des fonctions rationnelles	349
8.4.	Faisceaux de torsion et faisceaux sans torsion	350
8.5.	Critères de séparation d'un schéma intègre	351
§ 9.	Foncteurs représentables élémentaires dans la théorie des schémas: Schémas relativement affines, fibrés vectoriels, fibrés projectifs et grassmanniennes	354
9.1.	Morphismes affines et spectres d'Algèbres quasi-cohérentes	354
9.2.	Faisceaux quasi-cohérents sur un S-schéma affine sur S	361

9.3. Application aux changements de base pour les images directes de Modules quasi-cohérents	363
9.4. Fibré vectoriel associé à un faisceau de modules	369
9.5. Schémas en ensembles algébriques	376
9.6. Schémas en groupes linéaires.	377
9.7. Grassmanniennes d'un Module.	380
9.8. Morphismes de Plücker et de Segre	388
9.9. Fibrés en drapeaux	396
9.10. Fibrés en variétés de Stiefel	399
§ 10. Schémas formels	401
10.1. Schémas formels affines	401
10.2. Morphismes de schémas formels affines	403
10.3. Idéaux de définition d'un schéma formel affine	405
10.4. Schémas formels et morphismes de schémas formels	407
10.5. Idéaux de définition des schémas formels	409
10.6. Schémas formels comme limites inductives de schémas	411
10.7. Produit de schémas formels	417
10.8. Complété formel d'un schéma le long d'un sous-schéma	418
10.9. Prolongement d'un morphisme aux complétés.	423
10.10. Modules de présentation finie sur les schémas formels affines adiques	427
10.11. Modules de présentation finie sur les schémas formels adiques	433
10.12. Morphismes adiques de schémas formels	436
10.13. Morphismes de type fini	439
10.14. Sous-schémas fermés des schémas formels	441
10.15. Schémas formels séparés	444
10.16. Morphismes affines de schémas formels	446

APPENDICE

Ultraschémas et espaces algébriques de Serre

1. Spectres maximaux et ultraschémas	449
2. Espaces algébriques de Serre	451
Bibliographie	454
Index des notations	455
Index terminologique	460