TABLE DES MATIERES

Introduction. 7

Leitfaden. 25

Chapitre I : Idéaux à puissances divisées. 26

1. Idéaux à puissances divisées. 26
2. Enveloppe à puissances divisées d'un idéal. 39
   2.1. Extension de puissances divisées. 39
   2.2. Puissances divisées compatibles. 40
   2.3. Enveloppe à puissances divisées d'un idéal. 42
   2.4. Enveloppe à puissances divisées d'un idéal, avec conditions de compatibilité. 45
   2.5. Exemples. 47
   2.6. Deux isomorphismes. 49
   2.7. Extension plate des scalaires. 50
   2.8. Un autre cas d'extension des scalaires. 52

3. Filtration associée à un idéal à puissances divisées. 56
   3.1. Définition de la filtration PD-adique. 56
   3.2. Exemples. 57
   3.3. Enveloppes à puissances divisées PD-nilpotentes. 59
   3.4. Gradué associé à la filtration PD-adique. 60
   3.5. Cas d'un idéal quasi-régulier. 65

4. Invariants PD-différentiels d'un morphisme de schémas. 67
   4.1. Voisinages infinitésimaux à puissances divisées : cas d'une immersion fermée. 67
   4.2. Voisinages infinitésimaux à puissances divisées : cas d'une immersion quelconque. 70
   4.3. Voisinages infinitésimaux à puissances divisées de la diagonale. 72
   4.4. Conditions de compatibilité. 75
   4.5. Cas des immersions quasi-régulières. 78

Chapitre II : Calcul différentiel. 81

1. Connexions et stratifications. 82
   1.1. Catégories formelles. 82
   1.2. Connexions et pseudo-stratifications. 91
   1.3. Stratifications. 95
   1.4. Stratifications : autre définition. 100
   1.5. Opérations sur les objets munis de stratifications. 103

2. Opérateurs différentiels et stratifications. 106
   2.1. Opérateurs différentiels relativement à une catégorie formelle. 106
   2.2. Action des opérateurs différentiels sur un module muni d'une stratification. 112

3. Complexe de De Rham et courbure d'une connexion. 115
   3.1. Construction du complexe de De Rham. 115
   3.2. Courbure d'une connexion. 123
   3.3. Courbure et crochet. 126

4. Lissité différentielle. 133
   4.1. Donnée d'une stratification en termes de l'action des opérateurs différentiels. 134
   4.2. Stratifications relativement à un groupoïde PD-adique différentiellement lisse. 137
   4.3. Stratifications relativement à un PD-groupoïde affine différentiellement lisse. 149
   4.4. Modules stratifiés universels. 161

5. Les hyperext pour les complexes différentiels d'ordre $\leqslant 1$. 162
   5.1. Complexes différentiels d'ordre $\leqslant 1$. 163
   5.2. Le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}$. 165
   5.3. Complexes différentiels d'ordre $\leqslant 1$ injectifs. 168
   5.4. Les hyperext. 170

Chapitre III : Généralités sur le topos cristallin d'un schéma. 179

1. Définition du topos cristallin. 179
   1.1. Site et topos cristallins. 180
   1.2. Site et topos Y-HPD-stratifiants. 185

1.3. Site et topos cristallins PD-nilpotents. 187

2. Fonctorialité du topos cristallin. 188
2.1. Quelques lemmes. 189
2.2. Morphismes de fonctorialité entre topos cristallins. 196
2.3. Réduction modulo un sous-PD-idéal de l'idéal de compatibilité. 201

3. Relations entre le topos cristallin et le topos zariskien. 204
3.1. Ouverts du topos cristallin définis par les ouverts du topos zariskien. 204
3.2. Projection du topos cristallin sur le topos zariskien. 206
3.3. Immersion du topos zariskien dans le topos cristallin. 208
3.4. Compatibilités aux morphismes de fonctorialité. 209
3.5. Relations avec le topos zariskien d'un épaississement. 211

4. Gros topos cristallin. 212
4.1. Définition du gros topos cristallin. 212
4.2. Fonctorialité du gros topos cristallin. 216
4.3. Interprétation des morphismes de fonctorialité entre gros topos cristallins. 219
4.4. Relations entre gros topos cristallin et gros topos zariskien. 221

Chapitre IV : Cristaux. 225

1. Cristaux en A-modules. 226
1.1. Définition des cristaux. 226
1.2. Image inverse d'un cristal. 230
1.3. Image directe d'un cristal en modules par une immersion fermée. 235
1.4. Réduction modulo un sous-PD-idéal de l'idéal de compatibilité. 238
1.5. Morphismes quasi-lisses. 240
1.6. Relations entre cristaux et objets stratifiés. 242
1.7. La catégorie des cristaux en A-modules. 248

2. Le site cristallin restreint. 253
2.1. Définition du site cristallin restreint. 253
2.2. Modules parasites. 255
2.3. Sections sur le site cristallin restreint. 259

2.4. Foncteurs Hom et Hom sur le topos cristallin restreint. 262
2.5. La non-fonctorialité du topos cristallin restreint. 264

3. Linéarisation des opérateurs hyper-PD-différentiels. 268

3.1. Construction du foncteur linéarisation. 268
3.2. Linéarisé du complexe de De Rham. 277

Chapitre V : Cohomologie cristalline et cohomologie de De Rham. 287

1. Complexe de Čech-Alexander relatif à une immersion fermée. 288

1.1. Cohomologie cristalline au-dessus d'un objet du site cristallin. 288
1.2. Cohomologie cristalline et complexe de Čech-Alexander. 289
1.3. Cohomologie du topos cristallin restreint. 293

2. Le Lemme de Poincaré cristallin. 294

2.1. Le lemme de Poincaré. 294
2.2. Cohomologie cristalline du linéarisé d'un complexe d'opérateurs hyper-PD-différentiels. 301
2.3. Cohomologie cristalline et cohomologie de De Rham. 306
2.4. Cas du topos cristallin PD-nilpotent. 313

3. Le théorème de changement de base pour un morphisme lisse. 314

3.1. Rappels sur les complexes de cochaînes associés à un recouvrement. 314
3.2. Finitude cohomologique des modules quasi-cohérents. 316
3.3. Isomorphisme d'adjonction défini par un morphisme de topos annelés. 324
3.4. Topos associé à un diagramme de topos. 329
3.5. Le théorème de changement de base. 342
3.6. Connexion de Gauss-Manin. 356

4. Formule de Künneth. 363

4.1. Le morphisme de Künneth. 363
4.2. Formule de Künneth pour les morphismes lisses. 372

Chapitre VI : Classe de cohomologie associée à un cycle non singulier. 381

1. Cohomologie locale. 381

1.1. Définitions générales. 381

1.2. Cohomologie à support dans un sous-schéma régulièrement immergé. 389
1.3. Fibre cristalline en un point. 398
1.4. Complexe de Cousin. 402
1.5. Cohomologie locale des complexes différentiels d'ordre $\leqslant 1$. 407
1.6. Cohomologie semi-locale. 411

2. Relations entre les Ext cristallins et les hyperext des complexes différentiels. 416

2.1. Les Ext semi-locaux pour les modules cristallins. 417
2.2. Les hyperext semi-locaux pour les complexes différentiels cristallins. 421
2.3. Formules d'adjonction. 427
2.4. Théorèmes de comparaison. 435

3. Morphisme de Gysin. 440

3.1. Classe de cohomologie associée à un cycle non singulier en cohomologie de De Rham. 440
3.2. Compléments sur les hyperext associés à un sous-schéma lisse d'un schéma lisse. 456
3.3. Classe de cohomologie associée à un cycle non singulier en cohomologie cristalline. 476

4. Formule d'intersection. 490

4.1. Formule de projection. 490
4.2. Formule de transitivité. 495
4.3. Fonctorialité par rapport aux morphismes transversaux. 503

Chapitre VII : Dualité de Poincaré et rationalité de la fonction zêta. 521

1. Résidus et trace. 521

1.1. Théorème de finitude. 521
1.2. Résidu en un point fermé. 529
1.3. Un problème de déformation. 536
1.4. Le morphisme trace. 543

2. La dualité de Poincaré. 552

2.1. Le théorème de dualité. 552
2.2. Le morphisme image directe. 559

2.3. Morphisme de Gysin et image directe. 563
2.4. Isomorphisme de Künneth et image directe. 567

3. Formule de Lefschetz et rationalité de la fonction zêta. 573

3.1. Formule de Lefschetz. 573
3.2. Applications à la fonction zeta des schémas propres et lisses sur un corps fini. 581

Appendice : Cohomologie cristalline sur une base quelconque. 587

Bibliographie. 591

Index terminologique. 597

Index des notations. 601