

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

0.1 Geraden	1
0.2 Kreise	1
0.3 Neilsche Parabel	2
0.4 Newtonscher Knoten	3
0.5 Cartesisches Blatt	5
0.6 Zykloiden	6
0.7 Kleinsche Quartiken	8
0.8 Stetige Kurven	9

1 Affin-algebraische Kurven und ihre Gleichungen

1.1 Varietät einer Gleichung	12
1.2 Affin-algebraische Kurven	13
1.3 Lemma von Study	13
1.4 Komponentenerlegung	15
1.5 Irreduzibilität und Zusammenhang	15
1.6 Minimalpolynom	16
1.7 Grad	16
1.8 Schnittpunkte mit einer Geraden	17

2 Der projektive Abschluß

2.1 Unendlich-ferne Punkte	19
2.2 Projektive Ebene	19
2.3 Projektiver Abschluß einer Kurve	20
2.4 Komponentenerlegung	22
2.5 Schnittmultiplizität für Kurve und Gerade	23
2.6 Schnitt von zwei Kurven	24
2.7 Satz von Bézout	25

3 Tangenten und Singularitäten

3.1 Glatte Punkte	29
3.2 Singularitätenmenge	29
3.3 Lokale Ordnung	30

3.4	Tangenten in singulären Punkten	33
3.5	Ordnung und Schnittmultiplizität	36
3.6	Formel von Euler	37
3.7	Kurven durch vorgegebene Punkte	39
3.8	Anzahl der Singularitäten	40
4	Polaren und Hesse-Kurve	
4.1	Polaren	42
4.2	Eigenschaften der Polaren	46
4.3	Schnitt der Kurve mit ihrer Polaren	46
4.4	Hesse-Kurve	47
4.5	Schnitt der Kurve mit ihrer Hesse-Kurve	48
4.6	Beispiele	50
5	Duale Kurve und Plückerformeln	
5.1	Duale Kurve	52
5.2	Algebraizität der dualen Kurve	58
5.3	Irreduzibilität der dualen Kurve	59
5.4	Lokale numerische Invarianten	61
5.5	Biduale Kurve	62
5.6	Einfache Doppelpunkte und Spitzen	63
5.7	Plückerformeln	64
5.8	Beispiele	66
5.9	Beweis der Plückerformeln	66
6	Der Ring der konvergenten Potenzreihen	
6.1	Globale und lokale Irreduzibilität	71
6.2	Formale Potenzreihen	72
6.3	Konvergente Potenzreihen	74
6.4	Banachalgebren	75
6.5	Substitution von Potenzreihen	77
6.6	Ausgezeichnete Variable	79
6.7	Weierstraßscher Vorbereitungssatz	81
6.8	Beweise	83
6.9	Satz über implizite Funktionen	86
6.10	Henselsches Lemma	88

6.11	Teibarkeit im Potenzreihenring	89
6.12	Keime analytischer Mengen	91
6.13	Lemma von Study	92
6.14	Lokale Zweige	93
7	Parametrisierung der Kurvenzweige durch Puiseux-Reihen	
7.1	Problemstellung	95
7.2	Theorem über die Puiseux-Reihe	96
7.3	Träger einer Potenzreihe	96
7.4	Quasihomogenes Initialpolynom	98
7.5	Der Iterationsschritt	99
7.6	Die Iteration	100
7.7	Formale Parametrisierungen	102
7.8	Theorem von Puiseux (geometrisch)	103
7.9	Beweis	105
7.10	Variation der Lösungen	108
7.11	Konvergenz der Puiseux-Reihe	109
7.12	Linearfaktorzerlegung von Weierstraßpolynomen	110
8	Tangenten und Schnittmultiplizitäten von Kurvenkeimen	
8.1	Tangenten von Kurvenkeimen	113
8.2	Tangenten in glatten und singulären Punkten	114
8.3	Lokale Schnittmultiplizität mit einer Geraden	115
8.4	Lokale Schnittmultiplizität mit einem irreduziblen Keim	119
8.5	Lokale Schnittmultiplizität von Kurvenkeimen	121
8.6	Schnittmultiplizität und Ordnung	122
8.7	Lokale und globale Schnittmultiplizität	123
9	Die Riemannsche Fläche zu einer algebraischen Kurve	
9.1	Riemannsche Flächen	126
9.2	Beispiele	127
9.3	Desingularisierung einer algebraische Kurve	130
9.4	Beweis	131
9.5	Zusammenhang einer Kurve	136
9.6	Formel von Riemann-Hurwitz	136
9.7	Geschlechtsformel für glatte Kurven	137

9.8	Geschlechtsformel für Plückerkurven	139
9.9	Geschlechtsformel von Max Noether	140

Anhang

A.1 Die Resultante

A 1.1	Resultante und gemeinsame Nullstellen	141
A 1.2	Diskriminante	142
A 1.3	Resultante homogener Polynome	143
A 1.4	Resultante und Linearfaktoren	144

A.2 Überlagerungen

A 2.1	Definitionen	146
A 2.2	Eigentliche Abbildungen	147
A 2.3	Liftung von Wegen	148

A.3 Der Satz über implizite Funktionen

149

A.4 Das Newton-Polygon

A 4.1	Das Newton-Polygon einer Potenzreihe	153
A 4.2	Das Newton-Polygon eines Weierstraßpolynoms	155

A.5 Eine numerische Invariante von Kurvensingularitäten

A 5.1	Analytische Äquivalenz von Singularitäten	158
A 5.2	Grad einer Singularität	158
A 5.3	Allgemeine Klassenformel	162
A 5.4	Allgemeine Geschlechtsformel	162
A 5.5	Grad und Ordnung	164
A 5.6	Beispiele	165

A.6 Die Ungleichung von Harnack

A 6.1	Reell-algebraische Kurven	168
A 6.2	Zusammenhangskomponenten und Grad	168
A 6.3	Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	171

Literaturverzeichnis

172

Sachverzeichnis

174

Symbolverzeichnis

177