

Inhaltsverzeichnis

I. KAPITEL : GRUNDBEGRIFFE

§ 1.	TOPOLOGISCHE MANNIGFALTIGKEITEN	1
§ 2.	DIFFERENZIERBARE UND ANALYTISCHE MANNIGFALTIGKEITEN	2
2.1.	Lokale Funktionensysteme	2
2.2.	Morphismen der Räume mit lokalem Funktionensystem	3
2.3.	Induzierte lokale Funktionensysteme	3
2.4.	Definition der differenzierbaren und analytischen Mannigfaltigkeiten	4
2.5.	Immersionen, Einbettungen, Untermannigfaltigkeiten	7
§ 3.	TOPOLOGISCHE UND ANALYTISCHE GRUPPEN	9
3.1.	Gruppen in Kategorien	9
3.1.1.	Kategorien	9
3.1.2.	Gruppen in Kategorien	12
3.2.	Die topologische bzw. analytische Struktur einer Gruppe ist durch die Struktur im neutralen Element bestimmt	13
3.3.	Semidirektes Produkt von Gruppen	17
3.4.	Lokale Gruppe, Gruppenkeim	19
3.5.	Beispiele topologischer und analytischer Gruppen	20
	$GL(n, \mathbb{K})$	21
	$SL(n, \mathbb{K})$	21
	$O(n, \mathbb{K})$	22
	$Sp(n, \mathbb{K})$	23
	p -adisches Solenoid	24
3.6.	Liesche Gruppen, Struktursätze für Liesche Gruppen	27
§ 4.	UNTERGRUPPEN	28
4.1.	Quotientenräume	28
4.2.	Analytische Untergruppen	28
4.3.	Einige spezielle Normalteiler	34

II. KAPITEL : ÜBERLAGERUNGSTHEORIE

§ 1.	ÜBERLAGERUNGEN	36
1.1.	Quasi zusammenhängende Gruppen	36
1.2.	Überlagerungen	37
1.3.	Hochheben (Liften) von Abbildungen	39
1.4.	Induzierte Überlagerung	40
§ 2.	EINFACHER ZUSAMMENHANG	42
2.1.	Triviale Überlagerung	42
2.2.	Einfach zusammenhängende Räume. Quasi einfach zusammenhängende Gruppen	44
2.3.	Existenz von Hochhebungen	45
2.4.	Produkte von einfach zusammenhängenden Räumen und quasi einfach zusammenhängenden Gruppen	45
2.4.1.	Beispiel eines einfach zusammenhängenden, nicht lokal zusammenhängenden Raumes	50
2.5.	Einfacher Zusammenhang und Homotopie von Wegen	52
§ 3.	UNIVERSELLE ÜBERLAGERUNG UND FUNDAMENTALGRUPPE	55
3.1.	Universelle Überlagerung	55
3.2.	Normale Überlagerungen und Fundamentalgruppe	57
3.3.	Existenz von universellen Überlagerungen	59
§ 4.	LOKAL ISOMORPHE GRUPPEN	61
4.1.	Die Gruppen G_U	61
4.2.	Lokal isomorphe Gruppen	64
4.3.	Erweiterung von lokalen Homomorphismen	65
4.4.	Beispiel einer quasi einfach zusammenhängenden, nicht lokal zusammenhängenden Gruppe	66
4.5.	Eine Verallgemeinerung der universellen Überlagerung	67
4.6.	Die zu einer zusammenhängenden Lieschen Gruppe lokal isomorphen zusammenhängenden Lieschen Gruppen	74
	$SO(3, \mathbb{R})$	77
	$SO(4, \mathbb{R})$	78
	$SO(n, \mathbb{R})$	79
	$SL(n, \mathbb{C})$	80
	$SL(n, \mathbb{R})$	81

III. KAPITEL : DIFFERENTIALTHEORIE UND LIESCHE ALGEBREN

§ 1.	ALLGEMEINES	84
1.1.	Tangentenvektoren, Tangentialraum, Differential	84
1.2.	Hauptteil einer analytischen Abbildung	89
1.3.	Vektorfelder	91
1.4.	Das Kommutatorvektorfeld	92
1.5.	Integration analytischer Vektorfelder	93
§ 2.	DIFFERENTIALELEMENTE EINER LIESCHEN GRUPPE	96
2.1.	Linksinvariante Vektorfelder auf einer analytischen Gruppe	96
2.2.	Die Exponentialabbildung	98
	Vergleich der komplexen und der reellen Exponentialabbildung	101
2.3.	Erste Anwendung von \exp	102
	(Ein stetiger Homomorphismus reell analytischer Gruppen ist reell analytisch.)	
2.4.	Zweite Anwendung von \exp	103
	(Eine abgeschlossene Untergruppe einer reell analytischen Gruppe ist mit der induzierten Topologie eine analytische Untergruppe.)	
2.5.	Dritte Anwendung von \exp	106
	(Die analytische Struktur auf dem Quotienten einer reell analytischen Gruppe nach einer abgeschlossenen Untergruppe.)	
2.6.	Die Exponentialabbildung der Automorphismengruppe eines Vektorraumes	108
2.7.	Die Differentialabbildung der Gruppen (O, n, \mathbb{K}) , $Sp(2n, \mathbb{K})$ und $SL(n, \mathbb{K})$	110
§ 3.	DER KOMMUTATOR	111
3.1.	Erste Definition des Kommutators	111
3.2.	Zweite Definition des Kommutators	113
3.3.	Dritte Definition des Kommutators	115
3.4.	Die Campbell-Hausdorff - Formel	116
3.4.1.	Liesche Elemente	116
3.4.2.	Die Formel von Campbell-Hausdorff	119
3.5.	Der Zusammenhang zwischen der Campbell-Hausdorff - Formel und dem Produkt in einer analytischen Gruppe	125

§ 4.	LIESCHE ALGEBREN, SÄTZE VON LIE	132
4.1.	Definition der Lieschen Algebren	132
4.2.	Formulierung der Lieschen Sätze	134
4.3.	Beweise der Lieschen Sätze	136
4.4.	Über die Bedeutung der Lieschen Sätze für die Klassifikation der analytischen Gruppen	143
	Klassifikation der zusammenhängenden zweidimensionalen reell analytischen Gruppen und der zusammenhängenden kommutativen analytischen Gruppen	
§ 5.	DAS ZUSAMMENSPIEL VON LIEALGEBRA UND LIEGRUPPE	145
5.1.	Unteralgebren. Homomorphismen	145
5.2.	Automorphismen und Derivationen	147
5.2.1.	Derivationen. Die analytische Gruppe der Automorphismen einer endlich dimensional algebra	147
5.2.2.	Innere Derivationen. Darstellungen	149
5.2.3.	Innere Automorphismen. Adjungierte Darstellung	150
5.3.	Ideale. Quotienten	152
5.4.	Charakteristische Gruppen und Ideale	155
5.5.	Erweiterungen und semidirekte Erweiterungen von Liealgebren	156
5.6.	Zusammenhang zwischen semidirekten Produkten von Liealgebren und semidirekten Produkten von analytischen Gruppen	157

IV. KAPITEL : EINIGE STRUKTURSÄTZE

§ 1.	AUFLÖSBARE GRUPPEN	160
1.1.	Die abgeleitete Reihe	160
1.2.	Definition der Auflösbarkeit	161
1.3.	Charakterisierung der auflösbaren abstrakten Gruppen	162
1.4.	Charakterisierung der auflösbaren Lieschen Algebren	164
1.5.	Charakterisierung der auflösbaren Objekte der Kategorien (3) - (6)	165
1.6.	Satz von Lie	169
1.6.1.	Eigenwerte und Eigenvektoren	169
1.6.2.	Satz von Lie	171
1.7.	Konstruktion von auflösbaren Lieschen Algebren und Gruppen mit Hilfe von semidirekten Produkten	175

§ 2.	NILPOTENTE GRUPPEN UND ALGEBREN	175
2.1.	Nilpotente Gruppen	175
2.2.	Nilpotente Liesche Algebren	178
2.3.	Nilpotente Liesche Algebren und Gruppen von Endomorphismen eines Vektorraumes über einem algebraisch abgeschlossenen Körper	183
2.4.	Folgerungen aus der Formel von Campbell-Hausdorff bei nilpotenten Lieschen Gruppen	188
§ 3.	HALBEINFACHE ALGEBREN UND GRUPPEN	193
3.1.	Darstellungen, zu Darstellungen assoziierte Bilinearformen und Moduln, invariante Bilinearformen	193
3.2.	Das Radikal einer Lieschen Algebra bzw. einer Lieschen Gruppe	196
3.2.1.	Das Radikal einer Lieschen Algebra	196
3.2.2.	Das Radikal einer zusammenhängenden Lieschen Gruppe	197
3.3.	Cartans Kriterium für Auflösbarkeit	197
3.4.	Halbeinfache Algebren	201
3.5.	Darstellungen halbeinfacher Algebren	203
3.6.	Satz von Levi	206
3.7.	Existenz einer Lieschen Gruppe zu gegebener Liealgebra	208
§ 4.	ERWÄHNUNG EINIGER WEITERER SÄTZE ÜBER LIESCHE ALGEBREN	210
4.1.	Das Radikal einer Lieschen Algebra ist ein charakteristisches Ideal	210
4.2.	Größtes nilpotentes Ideal und nilpotentes Radikal	210
4.3.	Satz von Malcev	211
4.4.	Satz von Ado	212
§ 5.	KLASSIFIKATION DER KOMPLEXEN EINFACHEN LIEALGEBREN UND LIEGRUPPEN	212
§ 6.	REELLE EINFACHE LIEALGEBREN UND LIEGRUPPEN	214
6.1.	Beziehungen zwischen reellen und komplexen Liealgebren und zwischen reellen und komplexen Liegruppen	215
6.1.1.	Der Fall der Algebren	215
6.1.2.	Der Fall der Gruppen. Eine kurze Skizze	219
6.2.	Reelle Formen der Ausnahmealgebren	220

6.3.	Reelle Formen der klassischen Algebren	220
6.4.	Kompaktheit (Erwähnung einiger Sätze)	230
	Literatur	233
	Index	237
	Zeichentabelle	242