

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
Symbole und Bezeichnungen	11
<i>1. Ursprung und Ziel</i>	13
1.1. Geschichte	13
1.2. Bedeutung	15
<i>2. Mengen</i>	17
2.1. <i>Begriff der Menge</i>	17
2.1.1. Cantors „Definition“	17
2.1.2. Folgerungen	20
2.2. <i>Darstellungsarten</i>	22
2.2.1. Buchstabenbezeichnung	22
2.2.2. Mengendiagramm	24
2.2.3. Aufzählende Schreibweise (Umfangserklärung)	26
2.2.4. Beschreibende Form (Inhaltserklärung)	27
a) Mengenbildungsoperator	27
b) Aussage	28
c) Aussageform	31
d) Intervallschreibweise als Sonderform	33
2.3. <i>Zahl und Menge</i>	34
2.3.1. Menge und Zahlbegriff	35
2.3.2. Anzahl als Mengeneigenschaft	36
2.3.3. Vollständige Induktion	37
2.4. <i>Form und Menge</i>	38
2.4.1. Urstrukturen	38
2.4.2. Zahl, Form, Menge	39
2.4.3. Punktmengen	41
2.5. <i>Gestaltklötze zur Begriffsbildung</i>	44
2.5.1. Quellen und Ansätze	44
2.5.2. Logische Blöcke	44
2.5.3. Geometrisches Aufbau-System	45
2.5.4. Rechenkästen	46
2.6. Aufgaben	47
<i>3. Relationen</i>	51
3.1. <i>Zählen als Zuordnen</i>	51

3.2. Mengenbegriff und Elementbeziehung	52
3.2.1. Mengenbegriff als Zuordnung	52
3.2.2. Elementbeziehung als Relation	53
3.3. Gleichheitsbeziehung	55
3.3.1. Allgemeine Gleichheitsrelation	55
3.3.2. Mengengleichheit	56
3.4. Teilmengenbeziehung, Inklusion	58
3.4.1. Teil- oder Untermenge	58
3.4.2. Eigenschaften und Unterschiede	60
a) Reflexivität	60
b) Symmetrie	62
c) Transitivität	63
3.4.3. Negation und Komplementbildung	66
a) Negation als einstellige aussagenlogische Verknüpfung	66
b) Komplementärmenge	68
3.4.4. Leere Menge als Teilmenge und Komplement	71
3.4.5. Inklusion und Komplement in der didaktischen Forschung	72
3.5. Potenzmenge als Menge aller Teilmengen einer Menge ...	73
3.5.1. Mengen zweiter Stufe oder Mengensysteme	73
3.5.2. Induktionsbeweis für Elementenanzahl von $P(M)$	74
3.5.3. Diagramme für Potenzmengen	77
a) Euler-Venn-Diagramm	77
b) Baumdiagramm oder Baum	78
c) Hasse-Diagramm	84
3.6. Formale Definition der Relation	92
3.6.1. Teilerrelation	92
3.6.2. Teilmengenrelation	93
3.6.3. Produktmenge und ihre Anwendung in der Schule ...	93
3.6.4. Teilmengen der Produktmenge	95
3.7. Funktionen als besondere Relationen	95
3.7.1. Historisches und Terminologisches	95
3.7.2. Begriff der Funktion	96
3.7.3. Definitionsrelevante Sonderfälle von Beziehungen zwischen Mengen	98
a) im Hinblick auf die Verwendung von Elementen als Urbilder und Bilder	98
b) bezüglich der Eindeutigkeit der Zuordnung	100

c) Die Abbildungsdefinition unter Verwendung der Begriffe „linkstotal“ und „rechtseindeutig“	104
3.7.4. Darstellungsmöglichkeiten	104
a) Pfeildiagramme	104
b) Tabellen	106
c) Histogramme und Polygonzüge	107
d) Schaubilder	109
3.7.5. Eigenschaften von Funktionen	112
a) Surjektive Funktionen	113
b) Injektive Funktionen	114
c) Bijektive Funktionen	114
3.8. Äquivalenzrelationen	115
3.8.1. Die Relation „... ist gleichmächtig zu ...“	116
3.8.2. Die Relation „... ist restgleich zu ...“	119
3.8.3. Äquivalenzrelationen in strukturiertem Material	120
3.9. Ordnungsrelationen	121
3.9.1. Teilmengenrelation	121
3.9.2. Kleiner-Relation	122
3.9.3. Teilerrelation	124
3.9.4. Ordnung und Halbordnung	124
3.9.5. Hasse-Diagramme	125
3.10. Aufgaben	128
4. Operationen	134
4.1. Erläuterungen und Definition	134
4.2. Operationen mit Mengen	137
4.2.1. Mengenschnitt	137
4.2.2. Mengenvereinigung	138
4.2.3. Mathematische Verwendung der Begriffe „und“ und „oder“	139
4.2.4. Mengendifferenz	141
4.2.5. Differenzmenge und Komplement	143
4.2.6. Mengensysteme als Verknüpfungsgebilde	144
4.3. Operationen mit Zahlen	145
4.3.1. Addition	145
4.3.2. Multiplikation	145
4.3.3. Subtraktion	146
4.3.4. Division	146
4.3.5. Weitere Beispiele für Operationen	146
4.4. Verkettung von Funktionen	148

4.5. <i>Eigenschaften von Operationen</i>	152
4.5.1. Assoziativität	153
4.5.2. Kommutativität	154
4.5.3. Distributivität	155
4.5.4. Das neutrale Element	158
4.5.5. Inverse Elemente	159
4.5.6. Komplementäre Elemente	160
4.5.7. Verknüpfungstafeln	163
4.6. <i>Algebraische Strukturen</i>	164
4.6.1. Gruppe	164
4.6.2. Boolescher Verband	165
4.7. <i>Aufgaben</i>	166
5. <i>Transfinite Kardinalzahlen</i>	
5.1. <i>Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit von Mengen</i>	170
5.1.1. Diagonalverfahren	173
a) Erstes Diagonalverfahren	173
b) Zweites Diagonalverfahren	175
5.1.2. Rechenregeln für transfinite Kardinalzahlen	177
5.2. <i>Aufgaben</i>	179
6. <i>Antinomien und Axiomatik</i>	180
6.1. <i>Antinomien</i>	180
6.1.1. Menge aller Mengen	180
6.1.2. Russellsche Antinomie	180
6.2. <i>Axiomatik</i>	182
6.2.1. Russellsche Typentheorie	183
6.2.2. Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel-Skolem	184
6.2.3. Mengenlehre nach Neumann-Bernays-Quine	186
6.2.4. Ein Axiomensystem der Mengenlehre	187
6.3. <i>Ergänzungen des Axiomensystems</i>	189
7. <i>Aufgabenlösungen</i>	191
7.1. <i>Mengen</i>	191
7.2. <i>Relationen</i>	192
7.3. <i>Operationen</i>	200
7.4. <i>Transfinite Kardinalzahlen</i>	204
Literatur	206
Namen- und Sachverzeichnis	207