

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
§ 1. Einleitung . . . . .	1
Erstes Kapitel.	
<b>Grundlagen. Begriff der Kardinalzahl.</b>	
§ 2. Begriff der Menge. Beispiele von Mengen . . . . .	4
1. Beispiele 4. — 2. Über Cantors Definition des Mengenbegriffs 13.	
§ 3. Die Begriffe der Äquivalenz, der Teilmenge, der unendlichen Menge . . . . .	15
1. Abbildung und Äquivalenz 15. — 2. Grundeigenschaften der Äquivalenz 19. — 3. Begriff der Teilmenge 20. — 4. Dedekinds Kennzeichnung der unendlichen Mengen 22. — 5. Verhältnis der gewöhnlichen zur Dedekindschen Kennzeichnung 24. — Aufgaben 26.	
§ 4. Abzählbare Mengen . . . . .	27
1. Definition der abzählbaren Mengen 27. — 2. Einfachste Beispiele und Sätze 28. — 3. Die Menge der rationalen Zahlen 30. — 4. Die Menge der algebraischen Zahlen 35. — 5. Anwendungen auf beliebige unendliche Mengen 40. — Aufgaben 42.	
§ 5. Das Kontinuum. Begriff der Kardinalzahl oder Mächtigkeit. Die elementaren Mächtigkeiten $\alpha$ , $\epsilon$ , $\aleph$ . . . . .	43
1. Die Problemstellung 43. — 2. Beweis der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums 46. — 3. Bemerkungen zum vorstehenden Beweis 48. — 4. Geometrische Deutung und Verallgemeinerung des Ergebnisses 50. — 5. Existenz der transzendenten Zahlen 53. — 6. Der Begriff der Kardinalzahl oder Mächtigkeit. Die Kardinalzahlen $\alpha$ und $\epsilon$ 55. — 7. Zur Kritik obiger Begriffsbildung 57. — 8. Die Kardinalzahl $\aleph$ der Menge aller Funktionen 61. — Aufgaben 64.	
Zweites Kapitel.	
<b>Das Rechnen mit Kardinalzahlen.</b>	
§ 6. Die Größenanordnung der Kardinalzahlen . . . . .	64
1. Definition der Größenanordnung 64. — 2. Einfachste Folgerungen 66. — 3. Satz von Cantor 67. — 4. Der Äquivalenzsatz 70. — 5. Das Problem der Vergleichbarkeit 76. — Aufgaben 77.	
§ 7. Addition und Multiplikation der Kardinalzahlen . . . . .	77
1. Grundsätzliche Vorbemerkungen 77. — 2. Addition von Mengen 79. — 3. Eine Grundeigenschaft der Addition 81. — 4. Addition von Kardinalzahlen 82. — 5. Formale Rechenregeln und Beispiele 85. — 6. Multiplikation von Mengen 87. — 7. Die Multiplikation von Kardinalzahlen und ihre Regeln 91. — 8. Ungleichungen für Kardinalzahlen. Inverse Operationen 95. — 9. Beispiele zur Multiplikation 96. — 10. Die Mächtigkeit mehrdimensionaler Kontinuen 98. — Aufgaben 102.	
§ 8. Potenzierung der Kardinalzahlen. Das Problem des Unendlichkleinen 103	
1. Die Potenzierung als wiederholte Multiplikation 103. — 2. Definition der Potenz mittels der Belegungsmenge 104. — 3. Die Potenzmenge 107. — 4. Formale Rechenregeln 108. — 5. Die Potenzmenge	

einer abzählbaren Menge (Kontinuum) 109. — 6. Weitere Beispiele 111. — 7. Das Problem des Unendlichkleinen 113. — 8. Unendlichkleines und nichtarchimedische Größensysteme 117. — Aufgaben 119.

### Drittes Kapitel.

#### Ordnungstypen und Ordnungszahlen.

- § 9. Geordnete Mengen. Ähnlichkeit und Ordnungstypus . . . . . 120  
 1. Allgemeine Vorbemerkungen 120. — 2. Ordnungsbeziehung und geordnete Menge 124. — 3. Begriff der Ähnlichkeit. Beispiele 127. — 4. Begriff des Ordnungstypus 132. — 5. Addition zweier Ordnungstypen 134. — 6. Addition beliebig vieler Ordnungstypen 137. — 7. Über die Multiplikation von Ordnungstypen 139. — Aufgaben 142.
- § 10. Lineare Punktmengen . . . . . 142  
 1. Dichte und stetige geordnete Mengen 143. — 2. Beispiele 145. — 3. Der Ordnungstypus der Menge aller rationalen Punkte einer Geraden 150. — 4. Der Ordnungstypus des Linearkontinuums 154. — 5. Häufungspunkt und daran anschließende Begriffsbildungen 158. — 6. Beispiele 160. — 7. Schlußbemerkung über die Theorie der Punktmengen und ihre Anwendungen 163. — Aufgaben 164.
- § 11. Allgemeine Theorie der wohlgeordneten Mengen. Von den endlichen Mengen . . . . . 165  
 1. Grundbegriffe und Grundtatsachen 165. — 2. Die Vergleichbarkeit der wohlgeordneten Mengen 169. — 3. Addition und Multiplikation. Ordnungszahlen 174. — 4. Eigenschaften der wohlgeordneten Mengen und ihrer Abschnitte 178. — 5. Über die endlichen Mengen und die natürlichen Zahlen 181. — Aufgaben 184.
- § 12. Ordnungszahlen und Alefs. Die Wohlordnung beliebiger Mengen und ihre Bedeutung . . . . . 185  
 1. Die Größenanordnung der Ordnungszahlen 185. — 2. Das sukzessive Bildungsgesetz der Ordnungszahlen 187. — 3. Die Reihe der Ordnungszahlen. Transfinite Induktion 189. — 4. Alefs 192. — 5. Das Problem der allgemeinen Vergleichbarkeit. Der Wohlordnungssatz 194. — 6. Beweis des Wohlordnungssatzes 200. — 7. Der Vergleichbarkeitsatz 204. — Aufgaben 208.

### Viertes Kapitel.

#### Erschütterungen der Grundlagen und ihre Folgen.

- § 13. Die Antinomien der Mengenlehre . . . . . 209  
 1. Historisches 209. — 2. Die „logischen“ Antinomien 210. — 3. Die „epistemologischen“ Antinomien 214. — 4. Zur Aufklärung der Antinomien im allgemeinen 218.
- § 14. Der Intuitionismus, besonders Brouwer . . . . . 220  
 1. Das Unendliche als Gefahrenquelle 220. — 2. Historische Einleitung zum Intuitionismus 223. — 3. Die intuitionistische Grundthese: mathematische Existenz = Konstruierbarkeit 226. — 4. Die Ablehnung des „tertium non datur“ 228. — 5. Das Problem der Entscheidbarkeit 234. — 6. Der Mengenbegriff. Das Wesen des Kontinuums 236. — 7. Die Konsequenzen für die übrige Mathematik 240. — 8. Die Intuition des Allgemeinbegriffs der natürlichen Zahl 242.
- § 15. Die nicht-prädikativen Begriffsbildungen. Russell und die logizistische Methode . . . . . 244  
 1. Erwünschtheit einer konservativen Behandlung der Antinomien-

krise 244. — 2. Die nicht-prädikativen Begriffsbildungen und ihr Verbot 247. — 3. Russells Typen- und Stufentheorie 254. — 4. Das Reduzibilitätsaxiom 259. — 5. Symbolische Logik. Die „Principia Mathematica“ 263.

### Fünftes Kapitel.

#### Der axiomatische Aufbau der Mengenlehre. Die axiomatische Methode.

§ 16. Das Axiomensystem . . . . .	268
1. Einleitendes über das Wesen einer Axiomatik 268. — 2. Grundrelation $\varepsilon$ . Vorbereitende Definitionen 271. — 3. Relationales Axiom (Axiom der Bestimmtheit) 273. — 4. Die „erweiternden“ bedingten Existenzaxiome (Axiome der Paarung, der Vereinigung, der Potenzmenge) 275. — 5. Die „einschränkenden“ bedingten Existenzaxiome (Axiome der Aussonderung und der Auswahl) 280. — 6. Verschärfung des Aussonderungsaxioms 285. — 7. Das Auswahlaxiom als reines Existenzaxiom 288. — 8. Bedeutung und Geschichte des Auswahlaxioms 295. — 9. Unbedingtes Existenzaxiom und Axiome spezieller Art (Axiom des Unendlichen und Axiom der Ersetzung) 305. — 10. Historisches zum Axiomensystem 310.	
§ 17. Die Tragweite des Axiomensystems . . . . .	312
1. Die Herleitung des Rechnens mit Mengen 312. — 2. Axiomatische Theorie der Äquivalenz 313. — 3. Axiomatische Theorie der Ordnung 316. — 4. Die endlichen und die abzählbar unendlichen Mengen 320. — 5. Der Fortfall der Antinomien 322. — 6. Die nicht-prädikativen Verfahren innerhalb der Axiomatik 324. — 7. Axiomatik und Intuitionismus. Verschiedenheit der Auffassung über das Wesen der mathematischen Objekte 325.	
§ 18. Die Axiomatik in allgemein-methodischer Hinsicht . . . . .	334
1. Die axiomatische Methode im allgemeinen 334. — 2. Über die Unabhängigkeit eines Axiomensystems 340. — 3. Über die Unabhängigkeit des obigen Axiomensystems der Mengenlehre 343. — 4. Über die Vollständigkeit eines Axiomensystems 347. — 5. Die Unvollständigkeit des obigen Axiomensystems 354. — 6. Über die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems 356. — 7. Hilberts „metamathematische“ Methode 366. — 8. Das Verhältnis der Mathematik zur Logik. Schlußbemerkungen zum Streit um die Grundlegung der Mathematik 375.	
§ 19. Schluß: Die Bedeutung der Mengenlehre . . . . .	388
Literaturverzeichnis . . . . .	394
Namenverzeichnis . . . . .	418
Sachverzeichnis . . . . .	422