

Inhalt

Vorwort	7
I. Probleme des Unendlichen	10
1. Mächtigkeiten verschiedener Stufe	10
2. Antinomien der Mengenlehre	16
3. Axiomensysteme der Mengenlehre	20
II. Der Begriff der Menge	24
1. Bilden von Mengen	24
2. Grundbeziehungen zwischen Mengen	29
3. Übungsaufgaben	31
III. Mengenoperationen und aussagenlogische Verknüpfungen	33
1. Schnittmenge und aussagenlogische Konjunktion	33
a) Von der Konjunktion von Aussagen zur Schnittmenge	33
b) Von der Schnittmenge zur Wahrheitstafel der Konjunktion	35
2. Teilmenge und aussagenlogische Implikation	37
a) Von der Implikation von Aussagen zur Teilmengenrelation	37
b) Von der Teilmenge zur Wahrheitstafel der Implikation	41
c) Die Äquivalenz	43
3. Differenzmenge und aussagenlogische Negation	44
a) Von der Negation zur Definition der Elementfremdheit von Mengen	44
b) Von der Negation zur Differenzmenge	45
4. Vereinigungsmenge und aussagenlogische Adjunktion	46
a) Die verschiedenen Bedeutungen des Wortes „oder“	46
b) Von der Adjunktion von Aussagen zur Vereinigungsmenge	48
c) Von der Vereinigungsmenge zur Wahrheitstafel der Adjunktion	49
5. Übungsaufgaben	51
IV. Logische Gesetze und Beweisverfahren	52
1. Aussagenlogische Gesetze	52
a) Die Kommutativität und Assoziativität der aussagenlogischen Konjunktion und Adjunktion	52
b) Die distributiven Gesetze	53

c) Die De Morganschen Gesetze	54
d) Implikation und Kontraposition	55
2. Beweisverfahren	55
a) Die Definition der Folgebeziehung	56
b) Direkte und indirekte Beweise	58
c) Der Satz vom Widerspruch und der Satz vom ausgeschlossenen Dritten	61
3. Übungsaufgaben	63
V. Grundlegende Axiome der Mengenlehre	65
1. Das Extensionalitätsaxiom	65
a) Eigenschaften der Teilmengenrelation	65
b) Die Gleichheit von Mengen	68
2. Das erste Existenzaxiom	70
a) Zermelos Axiom der Elementarmengen	70
b) Folgerungen aus dem Elementarmengenaxiom	72
c) Die Konstruktion einelementiger Mengen	74
d) Meschkowskis Existenzaxiom	76
3. Übungsaufgaben	77
VI. Elementare Axiome der Mengenbildung	78
1. Mengenbildung durch Aufzählung	78
a) Das Paarbildungsaxiom	78
b) Das Axiom der Paarmengen	78
c) Axiome zur Mengenbildung durch Aufzählung	79
2. Mengenbildung durch Angabe einer Eigenschaft	80
a) Das Aussonderungsaxiom	81
b) Die Überwindung der Russelschen Antinomie	82
c) Die Bildung von Teilmengen	84
d) Die Bildung von Schnittmengen	85
e) Die Bildung von Differenzmengen	86
3. Mengenbildung durch Vereinigung	88
a) Das Vereinigungsaxiom	89
b) Das Axiom der Vereinigungsmenge	90
4. Das Carroll- oder Karnaugh-Diagramm	91
5. Übungsaufgaben	93
VII. Gesetze der Mengenalgebra	96
1. Grundgesetze	96
a) Die kommutativen und assoziativen Gesetze	97
b) Die distributiven Gesetze	98

c) Monotoniegesetze	99
d) Die Idempotenzgesetze	100
2. Gesetze der Komplementärmenge	101
a) Folgerungen aus der Definition	101
b) Die Gesetze der neutralen Elemente	102
c) Die De Morganschen Gesetze	103
3. Das Dualitätsprinzip.	105
a) Das Dualitätsprinzip der Mengenlehre	105
b) Das Dualitätsprinzip der Aussagenlogik	107
c) Erweiterungen der Dualitätsprinzipien	109
4. Übungsaufgaben	110
VIII. Aufbau von Mengen.	112
1. Die Potenzmenge	112
a) Definition der Potenzmenge	112
b) Existenz der Potenzmenge endlicher Mengen	113
c) Das Axiom der Potenzmenge	115
2. Die Menge der natürlichen Zahlen	117
a) Das Axiom des Unendlichen	117
b) Das Axiomensystem von Peano	118
c) Der Beweis durch vollständige Induktion	121
d) Ein mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen	122
e) Ein physikalisches Modell der natürlichen Zahlen	126
3. Übungsaufgaben	128
IX. Relationen	129
1. Das kartesische Produkt	129
a) Geordnete Paare	129
b) Die Definition des kartesischen Produkts	132
c) Das Auswahlaxiom	134
2. Relationen	138
a) Der Relationsbegriff	138
b) Verknüpfung von Relationen	141
c) Funktionen	145
d) Relationen in einer Menge	147
3. Übungsaufgaben	152
Lösungen der Übungsaufgaben	155
Literaturverzeichnis	175
Register.	176
1. Tafel der Axiome	176
2. Personenregister	178
3. Sachregister.	178