

VORBEMERKUNG	5
INHALT	7
KAPITEL 4 ALGEBRAISCHE ZAHLEN	13
§ 1 ELEMENTARE EINFÜHRUNG ALGEBRAISCHER ZAHLEN	13
Irrationalität $n$ -ter Wurzeln 13. Explizite Konstruktion von Körpererweiterungen mit Quadrat- und Kubikwurzeln 14 .	
§ 2 POLYNOME UND IHRE NULLSTELLEN	15
Polynomringe und freie Erweiterungen 16. Divisionsalgorithmus 16. Irreduzible Polynome 17 . Nullstellen 18 . Symbolische Adjunktion und Zerfällungskörper 18 .	
§ 3 KOMPLEXE ZAHLEN	19
Historisches 19. Hamilton's Zahlenpaare 20. Cauchy's Kongruenzbetrachtungen 21.	
§ 4 IDEALE PRIMFAKTOREN UND IDEALE ZAHLEN	22
Hilfsmittel: Einheitswurzeln und Kreisteilungskörper	22
Die Untersuchungen Kummer's: Ausgangspunkte	24
Reziprozitätsgesetze 24 und die Fermat'sche Vermutung 25.	
Die drei Fälle	26
Unterscheidung der rationalen Primzahlen nach ihrer Darstellbarkeit als Normen 26 . Der Zwischenkörper der Gauss'schen Perioden 27 . Diskussion der drei Fälle 28 .	
Ideale Primfaktoren	30
Vervollständigung der Teilbarkeitstheorie durch ideale Primfaktoren 30 . Deren Darstellbarkeit 32 .	
Ideale Zahlen	32
Ideale Zahlen 32 und ihre Äquivalenz 33 . Formaler Charakter dieser Zahlen 34 ; Divisoren 34 .	
§ 5 DEDEKIND'S EINFÜHRUNG DER IDEALE UND WEITERER KONSTRUKTIONEN	36
Ganze algebraische Zahlen 37 . Teilbarkeitstheorie mit Idealen 37 . Mengenbildung durch Komprehension bei der Einführung der Ideale 39 . Weitere mengentheoretische Konstruktionen Dedekind's 40 . Endliche algebraische Erweiterungen 41 .	

§ 6	KRONECKER'SCHE DIVISOREN	42
	Die Aufgabe	42
	Fortsetzung einer gegebenen Teilbarkeitstheorie auf eine endliche algebraische Erweiterung 42 . Funktionenkörper und Kronecker'sche Divisoren 43 .	
	Erster Schritt	44
	Fortsetzung der Norm 44 . Ganzheitskriterium 45 .	
	Zweiter Schritt	46
	Spezialisierungsprinzip 46 . Konstruktion grösster gemeinsamer Teiler 47 .	
	Dritter Schritt und Abschluss	48
	Divisoren und Ideale	49
	Die Korrespondenz zwischen Kronecker'schen Divisoren und Idealen 50 .	
	Divisorenmodelle	51
	Divisorenmodelle für Integritätsbereiche 52 . Dedekind-Ringe 53 .	
	Zusammenfassung	54
§ 7	DIE METHODE DER UNBESTIMMTEN UND DAS KRONECKER'SCHE PROGRAMM	55
	Unbestimmte und Divisoren	55
	Die Assoziation von Formen 55 . Der Gebrauch von Unbestimmten als eine rein algebraische Methode 57 .	
	Die symbolische Adjunktion	60
	Modulsysteme und die Konstruktion von Zerfällungskörpern 60 . Symbolische Adjunktion bei Weber und König 62 .	
	Das Kronecker'sche Programm	62
	Inhaltlicher Teil: Arithmetisierung 63 . Isolierung reeller Nullstellen 63 . Formaler Teil: algorithmische Methoden 64 . Beschreibung des Kronecker'schen Programmes nach Molk 65 .	
KAPITEL 5	REELLE ZAHLEN	70
§ 1	TRANSCZENDENTE ZAHLEN	70
	Liouville'sche Zahlen 71 . Abzählbarkeit algebraischer Zahlen 72 . Cantor's erster Beweis für das Auftreten transzendenter Zahlen 73 .	
§ 2	HILFSMITTEL ÜBER GEORDNETE MENGEN	74
	Definitionen 74 . Majoranten und Minoranten 75 . Normale Anfänge 76 .	
	Vollständig geordnete Mengen	76
	Das Induktionsprinzip von Khintchine 77 . Der Borel'sche Überdeckungssatz 77 . Hüllensysteme 78 .	
	Relativierung	79

§ 3	VERVOLLSTÄNDIGUNGEN GEORDNETER MENGEN	80
	Die Dedekind-MacNeille'sche Vervollständigung 80 , ihre Universaleigenschaft 80 . Einbettungen, Vervollständigungen, Darstellungen 81 . Kennzeichnung der Hüllendarstellungen 82 . Kennzeichnungen der normalen Vervollständigung 83 . Beschränkte Vervollständigungen 84 . Reell geordnete Mengen 85 .	
§ 4	HILFSMITTEL ÜBER GEORDNETE GRUPPEN UND RINGE	85
	Archimedische und stark archimedische geordnete Gruppen 86 . Der Fall totalgeordneter Gruppen 87 . Archimedische totalgeordnete Ringe 88 .	
§ 5	VERVOLLSTÄNDIGUNGEN GEORDNETER GRUPPEN UND KÖRPER	89
	Die Dedekind'sche Vervollständigung einer stark archimedisch geordneten Gruppe 89 . Der nicht-archimedische Fall: die Gruppe $D^3$ 91 . Dedekind'sche Vervollständigung eines archimedischen totalgeordneten Schiefkörpers 92 .	
§ 6	DIE STRUKTUR ARCHIMEDISCHER TOTALGEORDNETER GRUPPEN	94
	Sie sind dicht geordnet oder den ganzen Zahlen isomorph 95 ; sie sind kommutativ 95 . Existenz n-ter Teile in vollständigen Gruppen 96 . Die rationalen Vielfachen eines Elementes 97 . Universaleigenschaft der Dedekind'schen Vervollständigung 98 . Kennzeichnungstheorem für archimedische totalgeordnete Gruppen 99 . Einbettungstheorem 100 . Theorem über Monomorphismen 101.	
§ 7	DIE STRUKTUR ARCHIMEDISCHER TOTALGEORDNETER RINGE UND KÖRPER	101
	Die Gruppe $SA(G)$ der Semiautomorphismen 101 . Der Schiefkörper $SK(G)$ und die Schiefkörper $K_a(G)$ 103 . Die Körper $R_a(G)$ 104 . Kennzeichnungstheorem für archimedische totalgeordnete Körper 104 . Kennzeichnungstheorem für archimedische totalgeordnete Ringe 105 . Automorphismen 106 .	
§ 8	EUDOXISCHE GRUPPEN	106
	Scharf transitiv operierende Monoide von Endomorphismen 107 . Kennzeichnung der Additionsgruppen geordneter Ringe 108 . Gleichheit von Proportionen 109 . Rechenregeln (i) bis (viii) 109 . Homomorphismen und Proportionen 110 . Kennzeichnung eudoxischer Gruppen durch die Existenz der vierten Proportionalen 111 . Quadratisch abgeschlossene Gruppen 112 .	
§ 9	KONVERGENTE FOLGEN	112
	Konvergenz in kommutativen totalgeordneten Gruppen 113 . Cauchy-Folgen 113 . Existenz nicht-trivialer konvergenter Folgen 114 . Kennzeichnung der Vollständigkeit vermöge konvergenter Folgen 115 .	
§ 10	KOMPLETTIERUNGEN	117
	Präkomplettierungen und Komplettierungen 118 . Existenz minimaler Präkomplettierungen und deren Eigenschaften 118 . Beziehungen zur Dedekind'schen Vervollständigung:	

archimedischer Fall 122 . Nicht-archimedischer Fall 122. Zwei Beispiele 123 . Erfassung des nicht-archimedischen Falles durch wohlgeordnete Folgen 125 . Kompletterierung von Körpern 126 .

§ 11	G-ADISCHE BRUCHDARSTELLUNGEN	127
	g-adische Bruchdarstellung in einer vollständig, total- und dicht geordneten Gruppe 127 . Anwendung des Diagonalverfahrens 129 , Cantor's zweiter Beweis für das Auftreten transzendenter Zahlen 129 . Mächtigkeitsargumente 130 .	
	Reelle Zahlen als g-adische Brüche	130
	Die lexikographisch geordnete Menge der g-adischen Brüche 131 . Übertragungszahlen 132 , explizite Definition der Addition 132 und der Subtraktion 133 . Möglichkeiten zur Einführung der Multiplikation 135 . Die Rolle der Normierung 136 ; modifizierte Addition endlicher Brüche 137 , Adaptiertheit der Subtraktion 138 . Rückgewinnung der allgemeinen aus den endlichen Operationen 139 .	
§ 12	OFFENE UND ABGESCHLOSSENE MENGEN REELLER ZAHLEN	139
	Offene und abgeschlossene Mengen	140
	Offene Mengen und ihre Komponenten 140 . Abgeschlossene Mengen 141 .	
	Perfekte Mengen	142
	Das Theorem von Cantor und Bendixson 142 . Nirgends dichte Mengen 143 . Die geordnete Menge der Zwischenintervalle einer perfekten, nirgends dichten Menge $F$ 144 ; Rückgewinnung von $F$ daraus 145 . Die vier Typen perfekter, nirgends dichter Mengen 145 .	
	Das Cantor'sche Diskontinuum	146
	Zwei Definitionen 147 . Beschreibung durch 2-adische Brüche 148 und durch 3-adische Brüche 149 .	
	Kompakte Mengen	150
	Überdeckungssätze von Borel 150 und Lindelöf 152 . Kompakte und abgeschlossene Mengen 153 . Anwendungen: Regelfunktionen 154 . Kennzeichnungen durch Durchschnittssätze 155 .	
	Folgenkompakte Mengen	156
	Satz von Bolzano-Weierstrass 157 . Folgenkompaktheit und Bolzano-Weierstrass Eigenschaft 158 . Folgenkompaktheit und Separabilität 159 .	
§ 13	ZAHLEN UND GRÖSSEN	160
	Das geometrische Korrespondenzprinzip	161
	Größen 161 . Die Korrespondenz zwischen Zahlen und Größen 162 , Stevin 162 und Harnack 163 und du Bois-Reymond dazu 163 .	
	Das klassische Kontinuumproblem	164
	Finiter Atomismus 164 . Das Kontinuumproblem 165 .	

Zwei Auffassungen dazu 165 . Verallgemeinerter Atomismus 166 . Demokrit 166 , die Zenonischen Paradoxien 166 . Scholastische Auffassungen 166 . Spätmittelalter und Renaissance: geometrische Approximation, geometrische Summation, kinematisch-physikalische Stetigkeit 167 . Kepler über Rektifikation und Quadratur 169 . Galilei 169 . Die Suche nach einer allgemeinen Methode 170 .

#### Der analytische Kalkül

170

Pascal's unvergleichbar kleine Grössen 171 . Newton: Fluxionen 172 , erste und letzte Verhältnisse 173 . Leibniz: unendlich kleine Grössen 174 , unvergleichbar kleine und ideale Grössen 175 , Stetigkeitsprinzip 176 . Religiöse Argumente 178 . Berkeley 178 . Bemerkungen zur nicht-standard Analysis 179 .

#### Reelle Zahlen

180

Der Limesbegriff 180 . James Gregory 181 . d'Alembert 182 . Konvergenzprozesse und ihre Erfassung: Stetigkeit bei Bolzano 183 und Cauchy 184 . Funktionen 186 . Dedekind'sche Schnitte 186 . Die Theorie von Weierstrass 187 . Die formale Auffassung bei Cantor 188 , Heine 189 und Thomae 189 ; Frege's Kritik 190 . Die Erschaffung von Begriffen bei Dedekind 190 und Cantor 191 . du Bois-Reymond 192 . Die Rolle der Begriffe höherer Ordnung und der Mengenlehre 193 .

#### Grössen

194

Euklid's Grössenlehre 195 . Euklid's Beweisverfahren 196 . Die Rolle der vierten Proportionalen 197 . Archimedes 198 und die Beweismethode 199 . Grössenhalbgruppen im 19ten Jahrhundert 200 . Bettazzi 201 .

#### Grössen, Zahlen und das Kontinuum

202

Beweistechnik der Grössenlehre 202 . Die Fortschritte durch den Gebrauch des Zahlbegriffs 203 .

#### BIBLIOGRAPHIE

205

#### INDEX

220