

# Kategorien und Funktoren

## Einleitung und Überblick

### 0. Kategorien und Funktoren

0. 1	Definition von Kategorien .....	1
0. 2	Bezeichnungen .....	1
0. 3	Andere Definition von Kategorien .....	2
0. 4	Definition ohne Objekte .....	2
0. 5	Beispiele .....	2
0. 6	Funktoren .....	4
0. 7	Kategorien von Funktoren .....	5

### 1. Logik und Mengenlehre

1. 1	Zeichen, Terme, Formeln .....	6
1. 2	Axiome .....	7
1. 3	Beweise .....	7
1. 4	Aussagenlogik .....	8
1. 5	Einsetzen, Quantoren .....	8
1. 6	Der Hilbertsche Termoperator .....	9
1. 7	Endgültige Definition der formalen Theorie .....	9
1. 8	Mengenlehre .....	11
1. 9	Axiome der Mengenlehre .....	11
1.10	Sammelnde Formeln .....	12
1.11	Schemata der Mengenlehre .....	13
1.12	Paare .....	14
1.13	Unendlichkeits- und Auswahlaxiom .....	14
1.14	Produkte, Abbildungen, Korrespondenzen, Familien .....	15
1.15	Universen .....	15
1.16	Starke Mengenlehre .....	16
1.17	$U \notin U$ und $U = UU$ und $(U \neq \emptyset \Rightarrow N \in U)$ etc. ....	17
1.18	Vereinbarungen .....	17

### 2. Kategorien, Dualität, Funktoren, Natürlichkeit

2. 1	Neue Definition von Kategorien .....	18
2. 2	Dualitätsprinzip .....	20
2. 3	Beispiele .....	22
2. 4	Dualität bei Kategorien .....	23
2. 5	Teilkategorien .....	24
2. 6	Funktoren .....	25
2. 7	Kategorie der Funktoren .....	27
2. 8	Natürliche Transformationen, die Kategorie Nat .....	27
2. 9	Diagramme .....	29

<u>3. Darstellbare Funktoren</u>	33
3. 1 Äquivalenz .....	33
3. 2 Äquivalenz von Funktoren .....	34
3. 3 Hom-Funktoren .....	34
3. 4 Repräsentierbarkeit der Transformation von Hom-Funktoren ..	35
3. 5 Darstellbare Funktoren .....	36
<u>4. Einbettungen und Identifizierungen</u>	38
4. 1 Monomorph, epimorph, bimorph .....	38
4. 2 $\subset_Z$ (Ordnung durch Bilder), $\subset_Q$ .....	40
4. 3 $\prec_Z$ (Ordnung durch Zerlegung), Retraktionen .....	42
4. 4 $\prec_Q$ , Schnitte .....	43
4. 5 Äquivalenzen .....	44
4. 6 Dualitäten .....	45
4. 7 Definition von $\subset$ mit $\prec$ .....	46
4. 8 Einbettungen .....	47
4. 9 Teile .....	48
4.10 Identifizierungen, Quotienten .....	50
4.11 Beispiele .....	51
4.12 Einbettungen als repräsentierbare Funktoren .....	52
<u>5. Produkte und Coprodukte</u>	54
5. 1 Produkte von Objekten .....	54
5. 2 Produkte von Abbildungen .....	55
5. 3 Produkt als Funktor .....	57
5. 4 Übertragung von $\prec$ , $\subset$ .....	58
5. 5 Kommutativität .....	59
5. 6 Assoziativität .....	60
5. 7 Beispiele .....	60
5. 8 Coprodukte .....	61
5. 9 Matrizen .....	62
5.10 Diagonale und Codiagonale .....	64
5.11 Produkte in $\text{Nat}_V(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ .....	64
<u>6. Nullmorphisimen</u>	66
6. 1 Nullfamilien .....	66
6. 2 Nullobjekte .....	66
6. 3 $\rho : A * A \longrightarrow A \times A$ .....	68
<u>7. Addition und Coaddition</u>	71
7. 1 Additive Objekte und Homomorphismen .....	71
7. 2 Kommutativität und Assoziativität .....	72
7. 3 Neutrale, H-Objekte .....	73
7. 4 H-Objekte und $\rho : A * A \longrightarrow A \times A$ .....	75

7. 5	Gruppenobjekte .....	76
7. 6	Übergang $(A, a) \longrightarrow (\mathfrak{C}(?, A), +_a)$ .....	78
7. 7	Übergang $\mathfrak{C} \longrightarrow \text{Nat}$ für Homomorphismen .....	82
7. 8	Darstellbarkeit .....	83
7. 9	Coadditionen .....	85
7.10	Beispiele .....	87
7.11	$\mathfrak{C}(\text{Co-H-}, \text{H-Objekt})$ .....	90

### 8. Additive Kategorien

		92
8. 1	Eindeutigkeit natürlicher Additionen .....	92
8. 2	Halbadditive Kategorien .....	94
8. 3	Matrizenmultiplikation, Erweiterung zu additiver Kategorie .	96
8. 4	Präadditive Kategorien .....	98
8. 5	Additive Funktoren .....	99