

# Inhaltsverzeichnis

## Erster Teil: Boolesche Algebren

|           |  |    |
|-----------|--|----|
| <b>1.</b> | <b>Begriffe zur Mengenlehre</b>  |    |
| 1.1.      | Der „intuitive“ Begriff der Anhäufung, der Ansammlung und der Menge                | 1  |
| 1.2.      | Der mathematische Begriff der Menge  | 2  |
| 1.3.      | Verfahren zur Definition einer Menge   | 5  |
| 1.4.      | Bezeichnungen  | 5  |
| 1.5.      | Die Inklusion  | 6  |
| 1.6.      | Teilmenge. Teil. Leere Menge. Komplement   | 7  |
| 1.7.      | Verknüpfungen von Mengen   | 7  |
| 1.8.      | Die Gültigkeit des Distributivgesetzes der Vereinigung und der Durchschnittbildung | 11 |
| 1.9.      | Das Produkt zweier Mengen  | 14 |
| 1.10.     | Zuordnungen von Mengen   | 15 |
| 1.11.     | Kompositionsabbildung. Fortsetzung und Beschränkung                                | 16 |
| 1.12.     | Indizierung  | 17 |
| 1.13.     | Die Mächtigkeit einer Menge  | 19 |
| 1.14.     | Übungen  | 21 |
| <b>2.</b> | <b>Binäre Relationen (Äquivalenzrelationen – Ordnungsrelationen)</b>               |    |
|           | <b>Exkurs über Zahlensysteme (Binäres Zahlensystem)</b>                            |    |
| 2.1.      | Binäre Relationen  | 22 |
| 2.1.1.    | Einleitung   | 22 |
| 2.1.2.    | Äquivalenzrelationen   | 22 |
| 2.1.3.    | Äquivalenzklasse. Quotientenmenge  | 24 |
| 2.1.4.    | Ordnungsrelationen   | 25 |
| 2.2.      | Das binäre Zahlensystem  | 29 |
| 2.2.1.    | Exkurs über die Zahlensysteme  | 29 |
| 2.2.2.    | Das Binärsystem  | 31 |
| 2.2.3.    | Operationen im Binärsystem   | 33 |
| 2.2.4.    | Das oktale und das binäre System   | 33 |
| 2.2.5.    | Die zur Darstellung einer Dezimalzahl notwendige Anzahl von binären Ziffern        | 34 |
| 2.3.      | Übungen  | 35 |
| <b>3.</b> | <b>Definitionen und Eigenschaften der Booleschen Algebra</b>                       |    |
| 3.1.      | Wichtige Eigenschaften und Anwendungen   | 37 |
| 3.1.1.    | Einführung   | 37 |
| 3.1.2.    | Wiederholung der Eigenschaften der Inklusion                                       | 38 |
| 3.1.3.    | Weitere Eigenschaften  | 38 |
| 3.1.4.    | Das Distributivgesetz  | 40 |
| 3.1.5.    | Die Formel von A. de Morgan  | 41 |
| 3.1.6.    | Anwendung auf Probleme der Mengenalgebra   | 42 |
| 3.2.      | Maxterme, Minterme – Erste Berechnungen auf Booleschen Funktionen                  | 47 |
| 3.2.1.    | Definitionen   | 47 |

|           |  |     |
|-----------|--|-----|
| 3.2.2.    | Indizierung und Aufzählung der Minterme und Maxterme   | 50  |
| 3.2.3.    | Erstes Studium der Funktionen von zwei Klassen   | 52  |
| 3.2.4.    | Eigenschaften von Booleschen Funktionen bei einfachen Berechnungen                                 | 55  |
| 3.3.      | Übungen  | 59  |
| <b>4.</b> | <b>Die beiden Normalformen</b>   |     |
| 4.1.      | Eigenschaften der Minterme und Maxterme  | 61  |
| 4.2.      | Die erste Normalform   | 63  |
| 4.3.      | Die zweite Normalform  | 67  |
| 4.4.      | Überführung der ersten in die zweite Normalform und umgekehrt                                      | 70  |
| 4.5.      | Weitere Theoreme über die elementaren Kompositionen  | 71  |
| 4.6.      | Bestimmung der disjunktiven Normalform   | 74  |
| <b>5.</b> | <b>Elementare Komponenten und erste Vereinfachungen von Funktionen</b>                             |     |
| 5.1.      | Elementare Komponenten   | 80  |
| 5.2.      | Verschiedene Funktionen, die effektiv von $n$ Variablen abhängen                                   | 81  |
| 5.3.      | Die zum Ausdrücken einer Funktion in $n$ Klassen maximale Anzahl von notwendigen Operationszeichen | 85  |
| 5.4.      | Gebrauch der Exponentialentwicklung zur Vereinfachung der Ausdrücke                                | 88  |
| 5.5.      | Anzahl der logischen Elemente  | 93  |
| 5.6.      | Übungen zu den Kapiteln 4 und 5  | 95  |
| <b>6.</b> | <b>Binäre Boolesche Algebra</b>  |     |
| 6.1.      | Charakteristische Funktionen der Klassen   | 96  |
| 6.2.      | Die charakteristische Funktion eines Durchschnitts   | 96  |
| 6.3.      | Die charakteristische Funktion einer Vereinigung   | 97  |
| 6.4.      | Die charakteristische Funktion und die Negation  | 99  |
| 6.5.      | Binäre Algebra   | 100 |
| 6.6.      | Wertetafeln  | 101 |
| 6.7.      | Funktionen in Booleschen Variablen. Normalformen   | 103 |
| 6.8.      | Tabelle von Aiken  | 109 |
| 6.9.      | Relationen der Booleschen Algebra  | 110 |
| 6.10.     | Die Operation der disjunktiven Summe und die Operation von Sheffer                                 | 112 |
| 6.11.     | Axiomatik der Booleschen Algebra   | 115 |
| 6.12.     | Übungen  | 117 |
| <b>7.</b> | <b>Geometrische Darstellung der Booleschen Funktionen</b>  |     |
| 7.1.      | Funktionen in zwei Variablen   | 119 |
| 7.2.      | Funktionen in drei Variablen   | 123 |
| 7.3.      | Funktionen in vier Variablen   | 125 |
| 7.4.      | Übungen  | 132 |
| <b>8.</b> | <b>Boolesche Gleichungen. Gitter</b>   |     |
| 8.1.      | Boolesche Gleichungen  | 133 |
| 8.1.1.    | Kurze Wiederholung früherer Ergebnisse   | 133 |
| 8.1.2.    | Disjunktive Normalform   | 133 |
| 8.1.3.    | Boolesche Probleme. Codierung  | 135 |

|   |  |            |
|---|--|------------|
| 8.1.4.  | Ganze algebraische Funktionen und Gleichungen  | 136        |
| 8.1.5.  | Boolesche Gleichungen  | 137        |
| 8.1.6.  | Boolesche Funktionen, mit deren Hilfe sich alle anderen Funktionen darstellen lassen | 142        |
| 8.1.7.  | Boolesche Algebra und gewöhnliche Algebra  | 143        |
| 8.2.  | Bemerkungen über Gitter  | 145        |
| 8.2.1.  | Einleitung: Rückblick auf binäre Relationen  | 145        |
| 8.2.2.  | Teilweise geordnete Mengen. Definitionen   | 146        |
| 8.2.3.  | Bezeichnungen  | 151        |
| 8.2.4.  | Gitter   | 151        |
| 8.2.5.  | Modulares Gitter   | 164        |
| 8.2.6.  | Distributives Gitter   | 165        |
| 8.2.7.  | Komplementäres Gitter  | 169        |
| 8.2.8.  | Boolesches Gitter. Boolescher Ring   | 172        |
| 8.2.9.  | Klassifizierung der Gitter   | 178        |
| 8.2.10.   | Globale Operationen  | 181        |
| 8.2.11.   | Rolle der irreduziblen Elemente in einem distributiven Gitter                        | 182        |
| 8.3.  | Übungen  | 183        |
| <b>9.</b>   | <b>Methoden der Reduktion Boolescher Funktionen</b>                                  |            |
| 9.1.  | Boolesche Berechnung   | 186        |
| 9.2.  | Kanonische Transpositionen   | 190        |
| 9.3.  | Diagramme von Veitch   | 192        |
| 9.4.  | Tafeln von Havard  | 197        |
| 9.5.  | Die Quinesche Methode  | 208        |
| 9.6.  | Bestimmung der optimalen Lösungen  | 217        |
| 9.7.  | Methoden der Faktorisierung  | 221        |
| 9.8.  | Übungen  | 224        |
| <b>10.</b>  | <b>Anwendung der Booleschen Algebra in der operationellen Forschung</b>              |            |
| 10.1.   | Anwendung der distributiven Gitter   | 225        |
| 10.2.   | Anwendungen auf klassische Probleme  | 235        |
| <b>Zweiter Teil: Übungsbeispiele zur Booleschen Algebra</b> |  |            |
| <b>11.</b>  | <b>Boolesche Operationen auf Mengen</b>  | <b>264</b> |
| <b>12.</b>  | <b>Übungen aus dem Gebiet der binären Relationen</b>                                 | <b>270</b> |
| <b>13.</b>  | <b>Übungen zur Einführung in die Boolesche Algebra</b>                               | <b>284</b> |
| <b>14.</b>  | <b>Übungen zu den kanonischen Formen und den Elementargliedern</b>                   | <b>300</b> |
| <b>15.</b>  | <b>Wahrheitstafeln. Verwendung neuer Boolescher Operationen</b>                      | <b>310</b> |
| <b>16.</b>  | <b>Die geometrische Darstellung</b>  | <b>322</b> |
| <b>17.</b>  | <b>Boolesche Gleichungen – Verbände</b>  | <b>330</b> |
| <b>18.</b>  | <b>Methode zur Reduktion Boolescher Funktionen</b>                                   | <b>365</b> |
| <b>Namen- und Sachwortverzeichnis</b>                       |  | <b>376</b> |