

## INHALTSVERZEICHNIS

<b>A.</b>	<b>Literatur</b> .....	11
<b>B.</b>	<b>Vektoralgebra</b> .....	12
<i>I.</i>	<i>Einführung der Vektoren</i> .....	12
1.	Vektorraum .....	12
	Aufgaben .....	14
2.	Affiner Raum .....	15
	Aufgaben .....	16
3.	Lineare Mannigfaltigkeiten .....	16
	Aufgaben .....	17
4.	Koordinatensystem .....	18
	Aufgaben .....	20
5.	Koordinatentransformation. Orientierung .....	21
	Aufgaben .....	24
6.	Metrik .....	25
	Aufgaben .....	30
7.	Skalarprodukt, Winkel, ko- und kontravariante Koordinaten .....	30
	Aufgaben .....	38
<i>II.</i>	<i>Multivektoren</i> .....	40
1.	Bedingungen für die Gleichheit von Vektorräumen .....	40
	Aufgaben .....	42
2.	Bivektoren .....	42
2.1.	Definition .....	42
2.2.	Rechenregeln .....	45
2.3.	Bivektorsysteme .....	47
2.4.	Transformationsgesetze .....	48
2.5.	Skalarprodukt .....	49
2.6.	Anwendungen .....	51
	Aufgaben .....	54

3.	$p$ -Vektoren .....	54
3.1.	Definition .....	54
3.2.	Systeme von $p$ -Vektoren .....	57
3.3.	Rechenregeln und Transformationsgesetze .....	58
3.4.	Anwendung zur Formulierung des HELMHOLTZ-LIESchen Raum- problems .....	63
	Aufgaben .....	64
4.	Ergänzungsmultivektor .....	65
4.1.	Definition .....	65
4.2.	Beweis zweier Hilfssätze .....	65
4.2.1.	LAPLACEScher Entwicklungssatz .....	65
4.2.2.	Determinante des Produkts zweier Rechteckmatrizen .....	67
4.2.3.	Anwendung auf Funktionaldeterminanten .....	69
4.3.	Koordinaten der Ergänzung .....	70
4.4.	Bezeichnungen, Rechenregeln .....	75
4.5.	Anwendungen .....	76
4.5.1.	Ergänzung von Vektoren und Bivektoren im $R_3$ , $R_4$ und $R_5$ .....	76
4.5.2.	Vektorprodukt .....	77
4.5.3.	Spatprodukt .....	80
4.5.4.	Entwicklungssätze .....	82
	Aufgaben .....	85
III.	<i>Reziproke <math>n</math>-Beine</i> .....	86
1.	Definition .....	86
	Aufgaben .....	88
2.	Anwendung zur Darstellung der Ergänzung .....	88
	Aufgaben .....	92
IV.	<i>Analytische Vektordefinition. Invarianzen</i> .....	92
1.	Skalare und Vektoren. Dichten .....	92
1.1.	Definition durch das Transformationsgesetz .....	92
1.2.	Definition durch Invarianz des Skalarprodukts .....	93
1.3.	Skalare und Vektoren gegenüber einer bestimmten Transformations- gruppe .....	95
	Aufgaben .....	96
2.	Invariante Funktionen von Vektoren .....	96
2.1.	Invariante Funktionen .....	96
2.2.	Invariante Polynome .....	98
2.3.	Anwendungen .....	102
2.3.1.	Eindeutigkeit des Skalarprodukts .....	102
2.3.2.	LAGRANGESche Identität .....	104
2.3.3.	Produkt zweier Spatprodukte .....	104
2.3.4.	Vektorwertige Funktionen von Vektoren .....	105
	Aufgaben .....	105

3.	Eindeutigkeit des Vektorprodukts im $R_3$ .....	106
	Aufgaben .....	108
4.	Andere Darstellungen von Vektoren .....	108
4.1.	Komplexe Zahlen .....	108
4.2.	Quaternionen .....	109
	Aufgaben .....	113
<b>C.</b>	<b>Tensoralgebra</b> .....	<b>114</b>
<i>I.</i>	<i>Einführung der Tensoren</i> .....	<i>114</i>
1.	Motivierung .....	114
	Aufgaben .....	115
2.	Definition .....	115
2.1.	Tensoren zweiter Stufe .....	115
2.2.	Allgemeine Tensordefinition .....	118
	Aufgaben .....	119
3.	Zusammenhang mit der Zuordnung von Vektoren .....	119
	Aufgaben .....	121
4.	Beispiele .....	121
4.1.	$p$ -Vektoren .....	121
4.2.	LEVI-CIVITA-Tensor .....	122
4.3.	$\delta$ -Tensor .....	123
	Aufgaben .....	125
5.	Vektorprodukt .....	125
	Aufgaben .....	126
<i>II.</i>	<i>Rechenoperationen</i> .....	<i>126</i>
1.	Addition und Multiplikation mit Skalaren .....	126
2.	Multiplikation .....	127
3.	Verjüngung .....	128
4.	Überschiebung .....	129
5.	Permutation der Indizes .....	130
6.	Symmetrieeigenschaften .....	131
7.	Alternierende Multiplikation .....	132
	Aufgaben .....	134
<i>III.</i>	<i>Spezielle Untersuchung von Tensoren 2. Stufe</i> .....	<i>135</i>
1.	Besondere Tensoren .....	135
1.1.	Orthogonaler Tensor .....	135

1.2.	Transponierter Tensor .....	138
1.3.	Inverser Tensor. Rang .....	139
	Aufgaben .....	139
2.	Zerlegung von Tensoren .....	140
2.1.	Multiplikative Zerlegung .....	140
2.2.	Tensorquadriken .....	142
2.3.	Additive Zerlegung .....	144
	Aufgaben .....	146
3.	Invarianten von Tensoren zweiter Stufe .....	146
	Aufgaben .....	150
4.	Statistische Deutung des Kugeltensoranteils .....	151
<b>D.</b>	<b>Vektor- und Tensoranalysis .....</b>	<b>153</b>
<i>I.</i>	<i>Parameterabhängige Vektoren und Tensoren .....</i>	<i>153</i>
1.	Differentiation von Vektoren und Tensoren, Skalar- und Vektor- produkt .....	153
	Aufgaben .....	155
2.	FRENETSche Formeln .....	155
2.1.	FRENETSche Formeln im $R_3$ .....	155
2.2.	FRENETSche Formeln im $R_n$ .....	157
	Aufgaben .....	158
3.	Anwendung auf die Bewegung eines Massenpunktes .....	159
	Aufgaben .....	159
<i>II.</i>	<i>Vektor- und Tensorfelder .....</i>	<i>160</i>
1.	Definition. Beispiele .....	160
2.	Krummlinige Koordinaten .....	160
	Aufgaben .....	162
3.	Alternierende Differentiation schiefsymmetrischer Tensoren .....	163
3.1.	Definition. Nachweis der Schiefsymmetrie .....	163
3.2.	Nachweis der Tensoreigenschaft .....	164
3.3.	Satz von POINCARÉ .....	166
3.4.	Umkehrung des Satzes von POINCARÉ .....	166
3.5.	Alternierende Ableitung eines alternierenden Produkts .....	168
	Aufgaben .....	169
4.	Vektordifferentialoperatoren .....	169
4.1.	Gradient eines Skalars .....	170
	Aufgaben .....	171
4.2.	Gradient eines Vektors .....	171
4.2.1.	Definition .....	171

4.2.2.	Anwendung .....	174
	Aufgaben .....	175
4.3.	Rotation .....	175
4.3.1.	Koordinaten .....	175
4.3.2.	Rechenregeln .....	177
4.3.3.	Physikalische Deutung der Rotation eines Geschwindigkeitsfeldes... ..	178
4.3.4.	STOKESscher Satz .....	180
	Aufgaben .....	182
4.4.	Divergenz .....	182
4.4.1.	Definition .....	182
4.4.2.	Rechenregeln .....	185
4.4.3.	GAUßscher Satz .....	186
4.4.4.	Physikalische Deutung der Divergenz .....	188
	Aufgaben .....	188
4.5.	Integraldarstellung des Gradienten .....	188
4.6.	LAPLACEoperator .....	189
	Aufgaben .....	190
4.7.	Zerlegung eines Vektorfeldes .....	190
	Aufgaben .....	191
4.8.	Nabla .....	191
	Aufgaben .....	193
5.	Anwendung: Die Vektoroperationen in Kugelkoordinaten .....	193
	Aufgaben .....	197
E.	Ergänzungen .....	198
I.	<i>Linienflüchtige Vektoren</i> .....	198
	Aufgaben .....	201
II.	<i>Zusammenhang zwischen schiefsymmetrischen Tensoren und dem Kalkül der alternierenden Differentialformen</i> .....	201
	Lösung der Aufgaben .....	206
	Sachregister .....	219