

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0. Mengen und Abbildungen (Normenklatur)

1. Mengen	1
2. Durchschnitt und Vereinigung	2
3. Abbildungen (Funktionen)	3
4. Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen	4
5. Komposition von Abbildungen	5
6. Familien und Folgen	6
7. Produkte von Mengen	6
8. Äquivalenzrelationen	7

Kapitel I. Algebraische Strukturen

§ 1. Gruppen und Homomorphismen	9
1. Verknüpfungen	9
2. Halbgruppen. Unterhalbgruppen	10
3. Neutrale und inverse Elemente	12
4. Potenzen	13
5. Gruppen	14
6. Gruppe der invertierbaren Elemente	16
7. Homomorphismen	16
§ 2. Untergruppen, Normalteiler und Restklassengruppen	18
1. Untergruppen	18
2. Ordnung eines Elementes	21
3. Darstellung durch Linksmultiplikation	22
4. Innere Automorphismen	23
5. Nebenklassen und Normalteiler	24
6. Kommutatoren und Kommutatorgruppen	26
7. Äquivalenzrelationen in Halbgruppen. Restklassengruppen	27
§ 3. Die symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_n	29
1. Die Gruppe \mathfrak{S}_n	29
2. Fixpunkte. Transpositionen	30
3. Der Signumhomomorphismus $\text{sgn}: \mathfrak{S}_n \rightarrow \{1, -1\}$	32

4. Die alternierende Gruppe \mathfrak{A}_n	36
5. Bahnen und Signum	36
§ 4. Ringe und Körper	39
1. Ringe	39
2. Binomischer Lehrsatz	42
3. Homomorphismen. Unterringe	44
4. Charakteristik eines Ringes	45
5. Integritätsringe	45
6. Einheiten	46
7. Körper	47
§ 5. Polynomringe	48
1. Motivation der Multiplikation	48
2. Polynome. Grad	50
3. Polynome und Funktionen	51
4. Wurzeln	52
5. Injektivität von $\Theta: R[X] \rightarrow \text{Abb}(M, R)$	53
6. Polynome in mehreren Unbestimmten	54
7. Darstellung von Permutationen als Polynomringauto- morphismen. Signumepimorphismus	54
Kapitel II. Elementare Modultheorie	
§ 1. Moduln und Modulhomomorphismen	57
1. Moduln	57
2. Beispiele	58
3. Modulhomomorphismen	60
4. Der R -Modul $\text{Hom}_R(M, N)$	61
5. Der Endomorphismenring $\text{End}_R M$. Annulator	62
6. Die Automorphismengruppe $\text{Aut}_R M$	64
7. Charakterisierung endlicher direkter Produkte durch Homomorphismen	65
§ 2. Untermoduln und Restklassenmoduln. Restklassenringe	66
1. Untermoduln. Ideale	66
2. Untermoduln und Homomorphismen	68
3. Restklassenmoduln	69
4. Restklassenringe	71
5. Primideale und maximale Ideale	72
6. Die Restklassenringe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	73
§ 3. Isomorphiesätze. Eigenschaften von Restklassenmoduln	74
1. Exakte Sequenzen. Induzierte Homomorphismen	74
2. Isomorphiesätze	76

3. Abbildungstheoretische Charakterisierung von Restklassenmodul	79
§ 4. Funktoren von Modul	80
1. Verkleinerung des Grundringes	80
2. Funktoren. Additivität	82
3. Duale Moduln und duale Homomorphismen	84
4. Bidual	86

Kapitel III. Theorie endlich erzeugbarer Moduln

§ 1. Erzeugendensysteme	88
1. Erzeugendensysteme	88
2. Erzeugendenzahl eines Moduls	90
3. Zyklische Moduln	92
4. Summenmoduln	93
§ 2. Direkte Summen	94
1. Direkte Summen von Untermoduln	94
2. Direkte Produkte und direkte Summen	95
3. Projektionen. Fixpunktmoduln	98
4. Direkte Summanden. Supplemente	99
5. Fittingsches Lemma	100
§ 3. Freie Moduln	104
1. Lineare Unabhängigkeit. Freiheit	104
2. Basen. Freie Moduln. Koordinatensysteme	106
3. Epimorphismen mit freien Bildmoduln	108
4. Ergänzungssatz. Aufspaltung exakter Sequenzen	109
§ 4. Freiheitsgrad von Moduln	110
1. Freiheitsgrad	110
2. Die Gradungleichung $\text{fg } M \geq \text{fg } \text{Ker } \varphi + \text{fg } \text{Im } \varphi$	111
3. Die Gradgleichung $\text{fg } M = \text{fg } \text{Ker } \varphi + \text{fg } \text{Im } \varphi$	112
4. Folgerungen aus der Gradgleichung	114
§ 5. Lineare Abbildungen freier Moduln	116
1. Lineare Fortsetzung von Abbildungen	116
2. Dual und Bidual freier Moduln	119
3. Invarianz der Basislänge. Rang	121
4. Ein Struktursatz über den Endomorphismenring $\text{End}_R F$	122
§ 6. Endlichdimensionale Vektorräume	124
1. Freiheit und Basen	124
2. Ergänzungssatz und Austauschatz von Steinitz	126
3. Dimensionstheorie	127

4. Rang eines Homomorphismus. Bijektivitätskriterien	129
5. Verschwindungsräume	131
6. Dimensionsformel $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$ und Ranggleichung $\operatorname{rg} \varphi = \operatorname{rg} \varphi^*$	132
7. Dualitätsprinzip für endlichdimensionale Vektorräume	133

Kapitel IV. Lineare Abbildungen und Matrizen

§ 1. Der R -Modul $R^{(m,n)}$ der (m, n) -Matrizen. Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen	135
1. Matrizen	135
2. Transposition von Matrizen	137
3. Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen. Darstellungsisomorphismen	138
4. Duale Abbildungen und transponierte Matrizen	139
5. Darstellung linearer Abbildungen zwischen direkten Summen durch Matrizen	141
§ 2. Multiplikation von Matrizen	142
1. Die allgemeine Multiplikation $R^{(m,n)} \times R^{(n,p)} \rightarrow R^{(m,p)}$	142
2. Multiplikativität der Darstellungsisomorphismen	143
3. Rechenregeln der Matrizenmultiplikation	144
4. Der Isomorphismus $R^{(m,n)} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_R(R_n, R_m)$	145
5. Skalarprodukt	148
§ 3. Der Matrizenring $R^{(m,m)}$ und die allgemeine lineare Gruppe $\operatorname{GL}(m, R)$	149
1. Der Ring $R^{(m,m)}$	149
2. Der Ringisomorphismus $\Theta_X: \operatorname{End} M \rightarrow R^{(m,m)}$	151
3. Die Gruppe $\operatorname{GL}(m, R)$	151
4. Das Zentrum der Gruppe $\operatorname{GL}(m, R)$	153
5. Antihomomorphismen	153
§ 4. Äquivalente und ähnliche Matrizen	155
1. Übergangsmatrix. Basistransformation	155
2. Äquivalente Matrizen	157
3. Ähnliche Matrizen	158
4. Spurform Sp für Matrizen	159
5. Spurform Sp für Endomorphismen	161
6. Invariante Charakterisierung der Spurform	162
§ 5. Matrizenkalkül über Körpern. Rang einer Matrix	163
1. Spaltenrang und Zeilenrang	163
2. Ranggleichung für Matrizen	165
3. Normalformensatz für äquivalente Matrizen	166

§ 6. Lineare Gleichungen	167
1. Formulierung des Problems. Geometrische Interpretation	167
2. Allgemeine Lösbarkeitskriterien	169
3. Lösbarkeitskriterien für Körper	170
4. Normalformenmethode. Alternativsatz	171
5. Eliminationsmethode	174
§ 7. Elementare Matrizenumformungen über Körpern	175
1. Die Matrizen $B_{\mu\nu}(b)$ und $D_\mu(d)$. Elementarmatrizen	175
2. Elementare Zeilenumformungen	177
3. Elementare Spaltenumformungen	179
4. Herstellung der Normalform	179
5. Nähere Beschreibung der Produktdarstellung invertierbarer Matrizen durch Elementarmatrizen	181
§ 8. Die spezielle lineare Gruppe. Transvektionen und Dilatationen	182
1. Definition der Gruppe $SL(m, K)$	182
2. Die Inklusion $\text{Kom } GL(m, K) \subset SL(m, K)$ und die Gleichung $\text{Kom } GL(m, K) = SL(m, K)$	183
3. Geometrische Charakterisierung der Elementarmatrizen $B_{\mu\nu}(b)$	185
4. Die Gleichung $\text{Kom } SL(m, K) = SL(m, K)$	187
5. Geometrische Charakterisierung der Elementarmatrizen $D_\mu(d)$	189
6. Transvektionen und Dilatationen	190
7. Die Gruppe $SL(V)$	191

Kapitel V. Determinanten

§ 1. Multilineare und alternierende Abbildungen	193
1. Multilineare Abbildungen. Beispiele	193
2. Alternierende und schiefsymmetrische multilineare Abbildungen	195
3. Rechenregeln für alternierende Formen	197
§ 2. Existenz alternierender Formen	199
1. Konstruktion alternierender Formen mittels des Signumepimorphismus	199
2. Konstruktion alternierender m -Formen aus $(m-1)$ -Formen	201
§ 3. Determinanten	202
1. Determinante eines Endomorphismus	202
2. Eigenschaften der Determinante	203

3. Determinante einer quadratischen Matrix	205
4. Produktregel und Transpositionsinvarianz	208
5. Charakterisierung der Gruppe $SL(m, K)$ durch die Determinante	210
6. Spur eines Endomorphismus	212
§ 4. Determinantenkalkül	213
1. Berechnung spezieller Determinanten	213
2. Berechnung von Determinanten mittels elementarer Zeilen- und Spaltenumformungen	215
3. Unterdeterminanten	218
4. Adjungierte Matrix. Laplacescher Entwicklungssatz	219
§ 5. Inverse und adjungierte Matrix	221
1. Charakterisierung invertierbarer Matrizen und Endomorphismen durch ihre Determinante. Basiskriterien	221
2. Determinantenrang	223
3. Die Inklusion $(\det \varphi)M \subset \text{Im } \varphi$	224
4. Rechenregeln für adjungierte Matrizen	224
§ 6. Lineare Gleichungen und Determinanten	227
1. Cramersche Regel	227
2. Lineare Gleichungssysteme in Moduln. Epimorphismen endlich erzeugbarer R -Moduln	229
3. Eindeigkeitskriterien	231
4. Abbildungstheoretische Interpretation	233
5. Erzeugendenzahl und Freiheitsgrad	234
§ 7. Das charakteristische Polynom	236
1. Eigenräume, Eigenwerte und Eigenvektoren	236
2. Charakteristisches Polynom	238
3. Fahnenatz. Trigonalisierbare Matrizen	241
4. Satz von Cayley-Hamilton	244
Supplement. Noethersche, artinsche, halbeinfache Moduln	
§ 1. Noethersche und artinsche Moduln	248
1. Noethersche Moduln	248
2. Eigenschaften noetherscher Moduln	249
3. Noethersche Ringe	250
4. Hilbertscher Basissatz	251
5. Artinsche Moduln und artinsche Ringe	253
§ 2. Halbeinfache Moduln	255
1. Einfache Moduln	256
2. Direkte Summen eines einfachen Moduls	257

3. Halbeinfache Moduln. Ergänzungssatz	259
4. Folgerungen aus dem Ergänzungssatz	260
5. Umkehrung des Ergänzungssatzes. Charakterisierung halbeinfacher Moduln	261
§ 3. Struktur halbeinfacher Moduln	262
1. m -Komponenten. Struktursatz	262
2. Isomorphiekriterien für halbeinfache Moduln	264
3. Homogene Moduln	266
4. Länge halbeinfacher Moduln	268
Literatur	271
Symbolverzeichnis	272
Sachverzeichnis	273