

CHAPITRE II. — ALGÈBRES DE LIE LIBRES.....	7
§ 1. <i>Bigèbre enveloppante d'une algèbre de Lie</i>	7
1. Eléments primitifs d'une cogèbre.....	7
2. Eléments primitifs d'une bigèbre.....	9
3. Bigèbres filtrées.....	10
4. Bigèbre enveloppante d'une algèbre de Lie.....	10
5. Structure de la cogèbre $U(\mathfrak{g})$ en caractéristique 0.....	12
6. Structure des bigèbres filtrées en caractéristique 0.....	15
§ 2. <i>Algèbres de Lie libres</i>	17
1. Rappels sur les algèbres libres.....	17
2. Construction de l'algèbre de Lie libre.....	18
3. Présentations d'une algèbre de Lie.....	19
4. Polynômes de Lie et substitutions.....	19
5. Propriétés fonctorielles.....	20
6. Graduations.....	21
7. Suite centrale descendante.....	23
8. Dérivations des algèbres de Lie libres.....	25
9. Théorème d'élimination.....	25
10. Ensembles de Hall dans un magma libre.....	27
11. Bases de Hall d'une algèbre de Lie libre.....	30
§ 3. <i>Algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie libre</i>	32
1. Algèbre enveloppante de $L(X)$	32
2. Projecteur de $A^+(X)$ sur $L(X)$	34
3. Dimension des composantes homogènes de $L(X)$	35
§ 4. <i>Filtrations centrales</i>	38
1. Filtrations réelles.....	38
2. Fonction d'ordre.....	38
3. Algèbre graduée associée à une algèbre filtrée.....	39

4. Filtrations centrales sur un groupe	40
5. Un exemple de filtration centrale	42
6. Filtrations centrales entières	44
§ 5. <i>Algèbres de Magnus</i>	45
1. Algèbres de Magnus	45
2. Groupe de Magnus	46
3. Groupe de Magnus et groupe libre	46
4. Suite centrale descendante d'un groupe libre	48
5. p -filtration des groupes libres	50
§ 6. <i>La série de Hausdorff</i>	51
1. Exponentielle et logarithme dans les algèbres filtrées	51
2. Groupe de Hausdorff	52
3. Séries formelles de Lie	54
4. La série de Hausdorff	55
5. Substitutions dans la série de Hausdorff	57
§ 7. <i>Convergence de la série de Hausdorff (cas réel ou complexe)</i>	60
1. Polynômes-continus à valeurs dans \mathfrak{g}	60
2. Groupuscule défini par une algèbre de Lie normée complète	61
3. Exponentielle dans les algèbres associatives normées complètes	64
§ 8. <i>Convergence de la série de Hausdorff (cas ultramétrique)</i>	66
1. Majoration p -adique des séries exp, log et H	66
2. Algèbres de Lie normées	67
3. Groupe défini par une algèbre de Lie normée complète	68
4. Exponentielle dans les algèbres associatives normées complètes	69
Appendice. — <i>Fonction de Möbius</i>	71
Exercices du § 1	73
Exercices du § 2	75
Exercices du § 3	79
Exercices du § 4	79
Exercices du § 5	84
Exercices du § 6	90
Exercices du § 7	92
Exercices du § 8	92
Exercices de l'Appendice	94

CHAPITRE III. — GROUPES DE LIE.....	95
§ 1. <i>Groupes de Lie</i>	95
1. Définition d'un groupe de Lie.....	95
2. Morphismes de groupes de Lie.....	99
3. Sous-groupes de Lie.....	100
4. Produits semi-directs de groupes de Lie.....	101
5. Quotient d'une variété par un groupe de Lie.....	103
6. Espaces homogènes et groupes quotients.....	105
7. Orbites.....	108
8. Fibrés vectoriels à opérateurs.....	109
9. Définition locale d'un groupe de Lie.....	112
10. Groupuscules.....	114
11. Morceaux de lois d'opération.....	118
§ 2. <i>Groupe des vecteurs tangents à un groupe de Lie</i>	120
1. Lois de composition tangentes.....	120
2. Groupe des vecteurs tangents à un groupe de Lie.....	122
3. Cas des groupuscules.....	124
§ 3. <i>Passage d'un groupe de Lie à son algèbre de Lie</i>	125
1. Convolution des distributions ponctuelles sur un groupe de Lie.....	125
2. Propriétés fonctorielles.....	127
3. Cas d'un groupe opérant dans une variété.....	130
4. Convolution des distributions ponctuelles et des fonctions... ..	131
5. Champs de distributions ponctuelles définis par l'action d'un groupe sur une variété.....	135
6. Champs invariants de distributions ponctuelles sur un groupe de Lie.....	136
7. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie.....	138
8. Propriétés fonctorielles de l'algèbre de Lie.....	141
9. Algèbre de Lie du groupe des éléments inversibles d'une algèbre.....	143
10. Algèbres de Lie de certains groupes linéaires.....	144
11. Représentations linéaires.....	147
12. Représentation adjointe.....	151
13. Tenseurs et formes invariantes.....	155
14. Formules de Maurer–Cartan.....	156
15. Construction de formes différentielles invariantes.....	158
16. Mesure de Haar sur un groupe de Lie.....	159
17. Différentielle gauche.....	162
18. Algèbre de Lie d'un groupuscule de Lie.....	163

§ 4. <i>Passage des algèbres de Lie aux groupes de Lie</i>	166
1. Passage des morphismes d'algèbres de Lie aux morphismes de groupes de Lie	166
2. Passage des algèbres de Lie aux groupes de Lie	168
3. Applications exponentielles	171
4. Functorialité des applications exponentielles	175
5. Structure induite sur un sous-groupe	176
6. Primitives des formes différentielles à valeurs dans une algèbre de Lie	178
7. Passage des lois d'opérations infinitésimales aux lois d'opérations	182
§ 5. <i>Calculs formels dans les groupes de Lie</i>	184
1. Les coefficients $c_{\alpha\beta\gamma}$	185
2. Crochet dans l'algèbre de Lie	186
3. Puissances	187
4. Exponentielle	190
§ 6. <i>Groupes de Lie réels ou complexes</i>	192
1. Passage de morphismes d'algèbres de Lie aux morphismes de groupes de Lie	192
2. Sous-groupes intégraux	193
3. Passage des algèbres de Lie aux groupes de Lie	198
4. Application exponentielle	199
5. Application aux représentations linéaires	203
6. Sous-groupes intégraux distingués	204
7. Primitives des formes différentielles à valeurs dans une algèbre de Lie	206
8. Passage des lois d'opérations infinitésimales aux lois d'opérations	206
9. Application exponentielle dans le groupe linéaire	208
10. Complexification d'un groupe de Lie réel de dimension finie	210
§ 7. <i>Groupes de Lie sur un corps ultramétrique</i>	214
1. Passage des algèbres de Lie aux groupes de Lie	214
2. Applications exponentielles	216
3. Groupes standard	216
4. Filtration des groupes standard	218
5. Puissances dans les groupes standard	219
6. Application logarithme	221

§ 8. <i>Groupes de Lie sur \mathbf{R} ou \mathbf{Q}_p</i>	225
1. Morphismes continus.....	225
2. Sous-groupes fermés.....	227
§ 9. <i>Commutateurs, centralisateurs, normalisateurs dans un groupe de Lie</i>	230
1. Commutateurs dans un groupe topologique.....	230
2. Commutateurs dans un groupe de Lie.....	231
3. Centralisateurs.....	233
4. Normalisateurs.....	234
5. Groupes de Lie nilpotents.....	235
6. Groupes de Lie résolubles.....	240
7. Radical d'un groupe de Lie.....	241
8. Groupes de Lie semi-simples.....	242
§ 10. <i>Le groupe des automorphismes d'un groupe de Lie</i>	247
1. Automorphismes infinitésimaux.....	247
2. Le groupe des automorphismes d'un groupe de Lie (cas réel ou complexe).....	250
3. Le groupe des automorphismes d'un groupe de Lie (cas ultra-métrique).....	255
Appendice. — <i>Opérations sur les représentations linéaires</i>	256
Exercices du § 1.....	257
Exercices du § 3.....	258
Exercices du § 4.....	261
Exercices du § 5.....	265
Exercices du § 6.....	266
Exercices du § 7.....	272
Exercices du § 8.....	275
Exercices du § 9.....	276
Exercices du § 10.....	284
Note historique (chap. I à III).....	286
Bibliographie.....	306
Index des notations.....	309
Index terminologique.....	312