

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort . . . . .	XIII
Einleitung . . . . .	XXV
Einige Hinweise zu den Studienbegleitbriefen . . . . .	XXXIII

## Teil A

<i>I. Mengen und Relationen</i> . . . . .	1
Vortext zur 1. Folge . . . . .	3
1. <i>Der Begriff der Menge (Radbruch)</i> . . . . .	5
1.1. Mengenerklärung . . . . .	5
1.2. Bildung von Mengen . . . . .	7
1.3. Elementbeziehung . . . . .	8
1.4. Mengenzeichen . . . . .	9
1.5. Gleichsetzung von Mengenzeichen . . . . .	10
1.6. Venn-Diagramm . . . . .	12
Vortext zur 2. Folge . . . . .	15
2. <i>Aussage; Eigenschaft; Erfüllungsmenge; Teilmenge (Radbruch)</i> . . . . .	16
2.1. Aussage . . . . .	16
2.2. Aussageform . . . . .	17
2.3. Aussageform und Eigenschaft . . . . .	21
2.4. Erfüllungsmenge . . . . .	22
2.5. Teilmenge; Pfeildiagramm. . . . .	25
Vortext zur 3. Folge . . . . .	29
3. <i>Leere Menge; Potenzmenge; Verknüpfungen von Mengen und Aussageformen (Radbruch)</i> . . . . .	31
3.1. Die leere Menge . . . . .	31
3.2. Potenzmenge; Hasse-Diagramm . . . . .	33
3.3. Schnittmenge . . . . .	37
3.4. Vereinigungsmenge. . . . .	40
3.5. 'und' und 'oder' für Aussagen und Aussageformen . . . . .	42
3.6. Differenzmenge . . . . .	48
3.7. Komplementmenge. . . . .	50
3.8. 'nicht' für Aussageformen . . . . .	51
3.9. Hinweis auf den Begriff 'Verknüpfung' . . . . .	55

Vortext zur 4. Folge . . . . .	56
4. <i>Gesetzmäßigkeiten für Verknüpfungen von Mengen und Aussageformen (Radbruch)</i> . . . . .	58
4.1. Kommutativität . . . . .	58
4.2. Assoziativität . . . . .	59
4.3. Distributivität; Zugehörigkeitstafeln . . . . .	60
4.4. Überblick über die Gesetzmäßigkeiten . . . . .	66
4.5. Regeln von de Morgan . . . . .	68
4.6. 'wenn – so' für Aussagen und Aussageformen . . . . .	71
Vortext zur 5. Folge . . . . .	81
5. <i>Der Begriff der Kardinalzahl</i> . . . . .	82
5.1. Zählen und Abzählen . . . . .	82
5.2. Abbildung . . . . .	82
5.3. Mächtigkeit, Kardinalzahl. . . . .	101
5.4. Zusammenhang zwischen Kardinalzahlen und natürlichen Zahlen . . . . .	103
5.5. Kleiner-Beziehung für Kardinalzahlen . . . . .	104
5.6. Summe von Kardinalzahlen . . . . .	108
Vortext zur 6. Folge . . . . .	113
6. <i>Abzählbare und überabzählbare Mengen (Roether)</i> . . . . .	115
6.1. Abzählbarkeit . . . . .	115
6.2. Überabzählbarkeit . . . . .	118
6.3. Die Bedeutung der beiden Diagonalverfahren . . . . .	124
Vortext zur 7. Folge . . . . .	128
7. <i>Cartesisches Produkt. Produkt von Kardinalzahlen (Roether)</i> . . . . .	129
7.1. Geordnete Paare . . . . .	129
7.2. Cartesisches Produkt . . . . .	131
7.3. Eigenschaften des cartesischen Produkts . . . . .	137
7.4. Produkt von Kardinalzahlen . . . . .	142
Vortext zur 8. Folge . . . . .	147
8. <i>Eigenschaften von Zahlenverknüpfungen</i> . . . . .	149
8.1. Eigenschaften der Addition . . . . .	149
8.2. Eigenschaften der Multiplikation . . . . .	153
8.3. Anwendungen der Eigenschaften der Addition und Multiplikation für die endlichen Kardinalzahlen . . . . .	157

Vortext zur 9. Folge . . . . .	158
9. <i>Abbildungen (Funktionen) (Schmid)</i> . . . . .	163
9.1. Einführung . . . . .	163
9.2. Weitere Beispiele . . . . .	164
9.3. Der Begriff Abbildung . . . . .	165
9.4. Die Abbildung als Menge von Paaren . . . . .	168
9.5. Schreibweise und Bezeichnungsweise . . . . .	171
9.6. Veranschaulichung einer Abbildung . . . . .	175
9.7. Eigenschaften einer Abbildung . . . . .	178
9.8. Umkehrabbildung . . . . .	184
9.9. Verkettung von Abbildungen . . . . .	186
Vortext zur 10. Folge . . . . .	190
10. <i>Ereignisraum und Wahrscheinlichkeit (Schmid)</i> . . . . .	192
10.1. Einführung . . . . .	192
10.2. Zufallsexperimente . . . . .	192
10.3. Zufällige Ereignisse. . . . .	194
10.4. Verknüpfen von Ereignissen. Ereignisraum . . . . .	196
10.5. Häufigkeit eines Ereignisses . . . . .	197
10.6. Wahrscheinlichkeiten . . . . .	198
10.7. Anwendungen . . . . .	200
Vortext zur 11. Folge . . . . .	202
11. <i>Vollständige Induktion und Kombinatorik (Schmid)</i> . . . . .	205
11.1. Unvollständige Induktion . . . . .	205
11.2. Die Idee der vollständigen Induktion . . . . .	207
11.3. Technik des Beweisverfahrens . . . . .	209
11.4. Anwendungen in der Kombinatorik . . . . .	216
Vortext zur 12. Folge . . . . .	226
12. <i>Äquivalenzrelationen (Schmid)</i> . . . . .	227
12.1. Gleichwertigkeit . . . . .	227
12.2. Relationen auf einer Menge . . . . .	228
12.3. Äquivalenzrelationen . . . . .	232
12.4. Veranschaulichung von Äquivalenzrelationen . . . . .	236
12.5. Klasseneinteilung . . . . .	238
12.6. Äquivalenzrelation bei gegebener Klasseneinteilung . . . . .	243
12.7. Restklassen . . . . .	245

Vortext zur 13. Folge . . . . .	249
13. <i>Ordnungsrelationen (Schmid)</i> . . . . .	252
13.1. Einführung . . . . .	252
13.2. Reflexiv- transitive Relationen . . . . .	254
13.3. Ordnungsrelationen . . . . .	255
13.4. Verbände . . . . .	260
13.5. Vollständige Ordnungsrelationen . . . . .	263
13.6. Strikte Ordnungsrelationen . . . . .	265
13.7. Nichtsymmetrie, Antisymmetrie, Asymmetrie . . . . .	269
II. <i>Algebraische Strukturen</i> . . . . .	273
Vortext zur 15. Folge . . . . .	275
15. <i>Permutationen und ihre Hintereinander-Ausführung (Radbruch)</i> . . . . .	280
15.1. Permutationen . . . . .	280
15.2. Hintereinander-Ausführung von Permutationen . . . . .	284
15.3. Gesetzmäßigkeiten für die Verknüpfung $*$ auf $\mathfrak{S}(M)$ . . . . .	287
Vortext zur 16. Folge . . . . .	292
16. <i>Verknüpfungsgebilde (Radbruch)</i> . . . . .	296
16.1. Verknüpfungsgebilde . . . . .	296
16.2. Halbgruppe . . . . .	304
Vortext zur 17. Folge . . . . .	308
17. <i>Einführung in den Gruppenbegriff (Radbruch)</i> . . . . .	310
17.1. Lineare Gleichungen in Halbgruppen . . . . .	310
17.2. Der Gruppenbegriff: Definition und Beispiele . . . . .	317
Vortext zur 18. Folge . . . . .	322
18. <i>Untergruppen (Radbruch)</i> . . . . .	324
18.1. Untergruppen, Definition und Beispiele . . . . .	324
18.2. Untergruppen-Kriterien . . . . .	328

Vortext zur 19. Folge . . . . .	332
19. <i>Beschreibung von Gruppen (Engelhard–Schaefer)</i> . . . . .	334
19.1. Zyklische Gruppen . . . . .	334
19.2. Beispiele von nicht zyklischen Gruppen, die von endlich vielen Elementen erzeugt werden . . . . .	345
Vortext zur 20. Folge . . . . .	347
20. <i>Restklassengruppen; Isomorphie von Gruppen</i> <i>(Engelhard–Schaefer)</i> . . . . .	354
20.1. Die Struktur der Restklassen unter Addition und Multiplikation	354
20.2. Der Begriff 'Isomorphismus' . . . . .	360
20.3. Beispiele . . . . .	364
20.4. Eigenschaften eines Isomorphismus . . . . .	368
20.5. Isomorphieklassen . . . . .	370
20.6. Die log-Funktion als Isomorphismus . . . . .	375
20.7. Automorphismen als besondere Isomorphismen . . . . .	376
Vortext zur 21. Folge . . . . .	377
21. <i>Elementare Eigenschaften von Gruppen (Engelhard–Schaefer)</i>	380
21.1. Der Begriff der Nebenklasse . . . . .	380
21.2. Vergleich der Nebenklassen bezüglich ihrer Mächtigkeit . . . . .	384
21.3. Die Ordnung einer Untergruppe . . . . .	385
21.4. Darstellung von Gruppen durch Permutationen . . . . .	386
Vortext zur 22. Folge . . . . .	395
22. <i>Metrische Geometrie (Roether)</i> . . . . .	407
22.1. Geometrische Abbildungen . . . . .	407
22.2. Spezialfälle . . . . .	415
Vortext zur 23. Folge . . . . .	443
23. <i>Abbildungsgruppen der ebenen Geometrie (Roether)</i> . . . . .	448
23.1. Kongruenzabbildungen . . . . .	448
23.2. Zentrische Streckung. Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl . . . . .	459
23.3. Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen . . . . .	468
23.4. Affinitäten . . . . .	474
Vortext zur 24. Folge . . . . .	481
24. <i>Gruppen als Ordnungsprinzip in der Geometrie (Roether)</i> . . . . .	484

24.1. Äquivalenzrelationen und Gruppen . . . . .	484
24.2. Geometrien . . . . .	490
<i>III. Teilbarkeit im Bereich der natürlichen Zahlen</i> . . . . .	495
Vortext zur 25. Folge . . . . .	497
25. <i>Teilbarkeit in <math>\mathbb{N}</math> (Radbruch)</i> . . . . .	499
25.1. Die Halbgruppen $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N}, \cdot)$ . . . . .	499
25.2. Definition der Teilbarkeit; Teiler und Teilmenge . . . . .	501
25.3. Vielfaches und Vielfachenmenge . . . . .	507
Vortext zur 26. Folge . . . . .	509
26. <i>Teilbarkeitsregeln; Division mit Rest (Radbruch)</i> . . . . .	512
26.1. Teilbarkeitsregeln . . . . .	512
26.2. Division mit Rest . . . . .	517
Vortext zur 27. Folge . . . . .	522
27. <i>Primzahlen (Radbruch)</i> . . . . .	525
27.1. Primzahlen: Definition und Beispiele . . . . .	525
27.2. Primteiler; Unendlichkeit der Primzahlenmenge . . . . .	527
27.3. Existenz der Primfaktorzerlegung . . . . .	530
27.4. Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung . . . . .	532
Vortext zur 28. Folge . . . . .	536
28. <i>Primzahlprobleme (Radbruch)</i> . . . . .	539
28.1. Primzahlverteilung . . . . .	539
28.2. Spezielle Primzahlen . . . . .	543
28.3. Ungelöste Probleme der elementaren Zahlentheorie . . . . .	547
Vortext zur 29. Folge . . . . .	551
29. <i>Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches (Radbruch)</i> . . . . .	554
29.1. Größter gemeinsamer Teiler . . . . .	554
29.2. Kleinstes gemeinsames Vielfaches . . . . .	560
29.3. Berechnung des größten gemeinsamen Teilers: Euklidischer Algorithmus. . . . .	562
29.4. Berechnung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen . . . . .	565
29.5. Ein zweiter Beweis des Satzes von der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung . . . . .	566

Vortext zur 30. Folge . . . . .	570
30. <i>Zahlendarstellungen in verschiedenen Positionssystemen</i> ( <i>Radbruch</i> ) . . . . .	572
30.1. Positionssysteme . . . . .	572
30.2. Rechnen in Positionssystemen . . . . .	577
30.3. Die Bedeutung des Zweier-Systems . . . . .	582
<b>Anhang A</b>	
<i>Bemerkungen zu einigen logischen Sachverhalten (Engelhard,</i> <i>Engelhard-Schaefer)</i> . . . . .	587
L 1. Quantoren . . . . .	587
L 1.1. Allquantoren und Existenzquantoren . . . . .	587
L 1.2. Reihenfolge von Quantoren . . . . .	590
L 1.3. Allgemeingültige Aussageformen . . . . .	594
L 2. Negation . . . . .	595
L 2.1. Quantoren . . . . .	596
L 2.2. 'und', 'oder' . . . . .	599
L 2.3. Implikation . . . . .	600
L 3. Der mathematische Beweis . . . . .	602
L 3.1. Der direkte Beweis . . . . .	602
L 3.2. Kontraposition . . . . .	607
L 3.3. Der indirekte Beweis . . . . .	611
L 3.4. Zusammenhang zwischen Kontraposition und indirektem Beweis . . . . .	614
L 4. Didaktische Anmerkungen . . . . .	615
<i>Aufgaben zu Teil A</i> . . . . .	618
Erste Hausarbeit . . . . .	619
Übungsaufgaben zu Teil A (Busch, Milas) . . . . .	627
Lösungen der Aufgaben im Text von Teil A . . . . .	652
Lösungen der Aufgaben zu L . . . . .	714
Lösungen zur ersten Hausarbeit . . . . .	719
Lösungen zu den Übungsaufgaben zu Teil A . . . . .	723
Literatur . . . . .	753
Zeichen und Symbole . . . . .	754
Sachverzeichnis . . . . .	757